6b. Réflexions, transmissions aux interfaces – Ondes stationnaires- Cas électriques.

Réflexions aux interfaces. Superposition d'ondes. Ondes stationnaires. Cas électriques.

6b-1. Introduction

Comme dans le cas mécanique, l'onde électrique progressive est partiellement réfléchie par les inhomogénéités du milieu de propagation. Ces inhomogénéités peuvent être décrites en termes de variations d'impédance. Les expressions des coefficients de réflexion et de transmission ont alors une forme similaire à celles obtenues pour les ondes mécaniques. Les ondes réfléchies en se superposant aux ondes incidentes créent des interférences qu'il convient de considérer dans certaines situations. En particulier, compte tenu de la grande vitesse des ondes électriques (voisines de la vitesse limite, celle de la lumière), c'est aux hautes fréquences que les phénomènes seront remarquables, la longueur d'onde devenant comparables aux dimensions des guides ou câbles utilisés en pratique. Si la longueur d'onde est plus petite que la longueur des câbles, une onde stationnaire peut apparaître.

6b-2. Onde électrique : réflexion-transmission à l'extrémité d'un câble.

Les ondes électriques et électromagnétiques utilisées en pratiques sont souvent guidées le long de câbles, métalliques pour les basses fréquences, diélectriques pour les hautes fréquences.

Considérons le cas simple de la ligne bifilaire[1]. La ligne est alimentée par un générateur de signaux sinusoidaux (de pulsation ω) et se termine par une charge d'impédance Z_R.

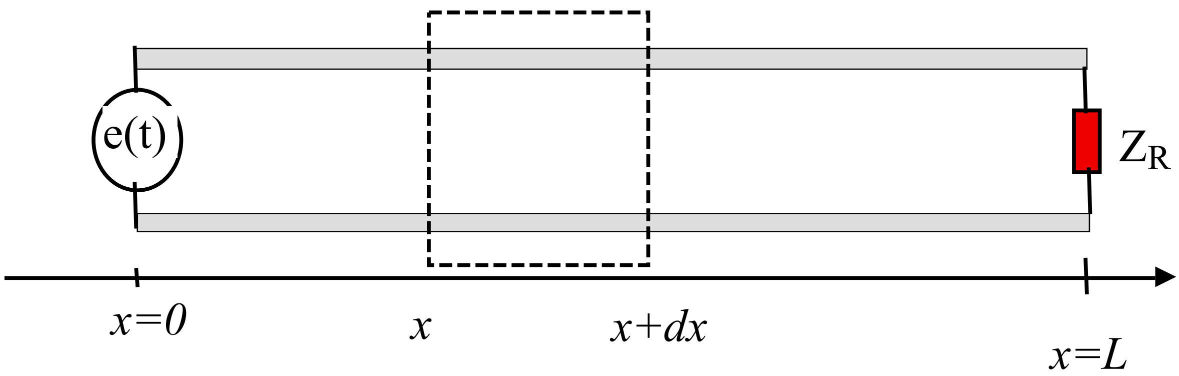
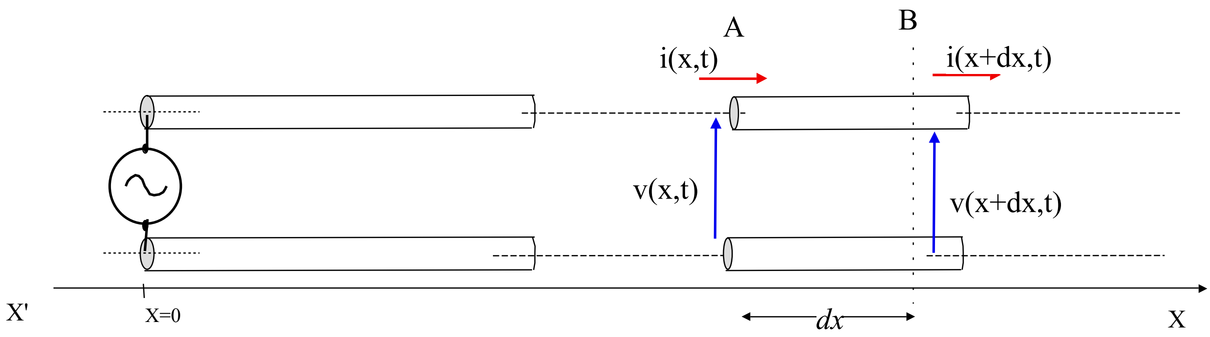


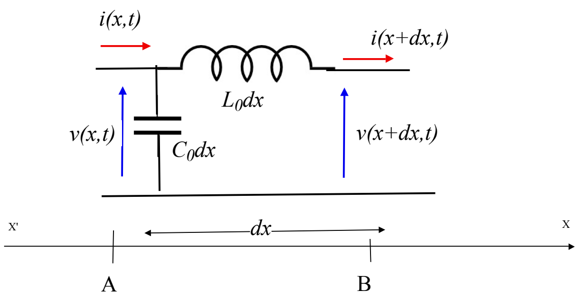
Fig. 6-1 : Ligne électrique alimenté par une tension sinusoïdale à son origine x = 0 et se terminant à son extrémité L par une charge d'impédance Z_R. Pour décrire le l'onde le long du câble, il convient de considérer un élément de longueur *dx* de ce câble.

Le signal électrique est caractérisé par la tension et le courant, grandeurs qui varient en position et dans le temps, soient $v(x,t)$ et $i(x,t)$. Considérons l'élément de ligne de longueur *dx* compris entre les points A et B (schéma ci-après)

[1] Électromagnétisme. Fondements et applications. J. Ph. Pérez, R. Carles, R. Fleckinger, Dunod, 4è ed., 2009



ou encore, si on représente les composants électriques élémentaires (dans le cas d'un câble sans pertes) :



On a montré dans le chapitre sur la propagation que u et i obéissent à l'équation d'onde appelée dans le cas électrique, équiation des télégraphistes : et

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-\frac{1}{L_0 C_O}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}-\frac{1}{L_0 C_0}\frac{\partial^2 i}{\partial x^2}=0$$

avec L_0 et C_0, l'inductance et la capacité par unité de longueur du câble.

$\frac{1}{L_0 C_0} = v_\varphi^{\ 2}$ correspond au carré de la vitesse (de phase) de l'onde.

Considérons la situation où le générateur fournie un signal sinusoïdal

$$u(x=0,t)=U_0 \exp(j\omega t)$$

La solution correspondant à une onde allant de la source vers l'extrémité s'écrit :

$$v^+(x,t)=V_0^{\ +}\exp(\omega t-kx) \text{ et } i^+(x,t)=I_0^{\ +}\exp(\omega t-kx).$$

Pour une onde se propageant en sens inverse (onde régressive) comme c'est le cas pour les réflexion que nous abordons plus loin, on a :

$$v^-(x,t)=V_0^{\ -}\exp(\omega t+kx) \text{ et } i^-(x,t)=I_0^{\ -}\exp(\omega t+kx).$$

Le coefficient de proportionalité entre tension et courant en un point de la ligne est appelé **impédance caractéristique** : $Z_{car} = \frac{1}{C_0\ v_\varphi} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$

Nous avons vu dans le chapitre précédent que dans le cas d'une ligne avec perte on a :

$$Z_{car} = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}}$$

Il convient en pratique de tenir compte des 2 types d'ondes dans les câbles (progressive et régressive) car souvent les inhomogénités génèrent des réflexions.

L'onde réfléchie s'écrit (en négligeant les pertes):

$\widetilde{u^-(x,t)} = U_0^- \exp\left[j\left(\omega t + kx\right)\right]$ et

ce qui veut dire qu'on présence de réflexion la tension en un point x est égale à :

$\widetilde{u(x,t)} = U_0^+ \exp\left[j\left(\omega t - kx\right)\right] + U_0^- \exp\left[j\left(\omega t + kx\right)\right]$

On peut alors introduire une impédance pour la ligne qui tient compte des 2 ondes :

$Z_l = \dfrac{\overline{U}}{\overline{I}}$ avec $\overline{U(x)} = U_0^+ \exp\left(-jkx\right) + U_0^- \exp\left(jkx\right)$

Exprimons I à partir de U :

$d\overline{U} = \left(R_0 + j\omega L_0\right) dz\, \overline{I(x)}$

=> $\overline{I(x)} = \dfrac{1}{R_0 + j\omega L_0} \dfrac{d\overline{U}}{dz}$ soit $\overline{I(x)} = \dfrac{jk}{R_0 + j\omega L_0}\left[U_0^+ \exp\left(-jkx\right) - U_0^- \exp\left(jkx\right)\right]$

Nous avons donc l'expression suivante pour l'impédance de ligne en x :

$$Z(x) = Z_{car} \frac{U_0^+ \exp\left(-jkx\right) + U_0^- \exp\left(jkx\right)}{U_0^+ \exp\left(-jkx\right) - U_0^- \exp\left(jkx\right)}$$

Si on introduit un coefficient *r(x)* pour exprimer le taux de réflexion dans la ligne :

$$r(x) = \frac{U_0^- \exp(jkx)}{U_0^+ \exp(-jkx)} = \frac{U_0^-}{U_0^+} \exp(j2kx)$$

on obtient l'expression suivante pour l'impédance en x :

$$Z(x) = Z_{car} \frac{1 + \overline{r(x)}}{1 - \overline{r(x)}}$$

A l'extrémité de la ligne (x=L) on a $r(L) = \dfrac{U_0^-}{U_0^+} \exp(j2kL)$.

On peut réécrire *Z(L)* sous la forme : $Z(L) = Z_{car} \dfrac{1 + \overline{r(L)}}{1 - \overline{r(L)}}$

On alors le facteur de réflexion en bout de ligne sous la forme : $\overline{r(L)} = \dfrac{Z_L - Z_{car}}{Z_L + Z_{car}}$

On peut écrire *r(x)* sous la forme

$$\overline{r(x)} = \left[\frac{U_0^-}{U_0^+} \exp\left(j2kL\right)\right] \exp(-j2kL) \exp\left(j2kx\right) = \overline{r(L)} \exp\left[j2k\left(x - L\right)\right]$$

A l'entrée de la ligne on a :

$$Ze = Z(x=0) = Z_{car}\frac{1+\overline{r(0)}}{1-\overline{r(0)}}$$

avec $\overline{r(0)} = r(L)\exp(j-2kL) = \dfrac{Z_L - Z_{car}}{Z_L + Z_{car}}\exp\left(-j2kL\right)$

Après remplacement on obtient : $Ze = Z_{car}\dfrac{Z_L + j\,Z_{car}\tan\left(kL\right)}{Z_{car} + j\,Z_L\tan\left(kL\right)}$

Considérons les 2 cas particuliers suivants : extrémité en court-circuit et extrmité ouverte.

Dans le 1er cas ($Z_R = 0$) on a : $Ze = j\,Z_{car}\tan\left(kL\right)$.

Dans le 1er cas ($Z_R = \infty$) on a : $Ze = \dfrac{Z_{car}}{j\tan\left(kL\right)}$.

<u>Adaptation d'impédance</u>.

Il est possible d'éliminer les réflexions en bout de ligne en adaptant l'impédance, c'est-à-dire en faisant en sorte que $Z_L = Z_R = Z_{car}$. La puissance transportée par l'onde est alors totalement transmise à la charge. Dans ce cas l'impédance *Z(x)* ne dépend plus de la position et est égale à l'impédance caractéristique.

Si l'impédance n'est pas adaptée on introduit un paramètre appelé Taux d'ondes stationnaires (TOS) pour caractériser la situation rencontrée. On a :

$$TOS = \frac{U_{\max}}{U_{\min}} = \frac{U_0^+\exp\left(-jkL\right)+U_0^-\exp\left(jkL\right)}{U_0^+\exp\left(-jkL\right)-U_0^-\exp\left(jkL\right)} = \frac{1+\overline{r\left(L\right)}}{1-\overline{r\left(L\right)}}$$

<u>Résumé des différentes conditions à l'extrémité</u> :

• Si la ligne est fermée sur l'impédance caractéristique ($Z_R = Z_c$) on a d $I_0^- = 0$; l'onde réfléchie est donc supprimée ; il n'y a que l'onde incidente.

• Si la ligne est fermée par un court-circuit ($Z_R = 0$), on a $I_0^- = I_0^+$. On obtient un système d'ondes stationnaires avec un ventre d'intensité et un nœud de tension en z = 0 .

• Si la ligne est fermée sur un coupe-circuit ($Z_R = \infty$) , on a $I_0^- = -I_0^+$. On obtient un système d'ondes stationnaires avec un nœud d'intensité et un ventre de tension en z = 0 .