6a. Réflexions, transmissions aux interfaces – Ondes stationnaires- Cas mécaniques.

Réflexions aux interfaces. Superposition d'ondes. Ondes stationnaires. Cas mécaniques.

6a-.1.1. INTRODUCTION

L'énergie transportée par une onde se propage dans l'espace de la source vers l'infini tant que le milieu reste homogène, l'onde est dite progressive. Lorsque le milieu change, les conditions particulières d'oscillation à l'interface entre les deux milieux (ou sur des inhomogénéités) entraînent des modifications des directions de propagation, une partie de l'énergie transportée peut être alors redirigée vers la source. Dans certaines situations l'énergie peut rester confinée dans un espace bien défini et s'y accumule. On arrive à une situation de stabilité où il n'y a plus de propagation, mais une répartition bien définie de l'énergie des vibrations. L'onde devient « stationnaire », l'énergie ne se propage plus mais est répartie de façon caractéristique dans le milieu.

Pour comprendre le phénomène d'onde stationnaire, il convient d'étudier les conditions particulières de passage à travers les interfaces entre différents milieux. La notion d'impédance (réaction du milieu à l'action imposée) est utile pour faire cette description.

6a-.2. IMPÉDANCE

6a-.2.1. IMPÉDANCE MÉCANIQUE

La notion d'impédance est très familière aux électriciens. Cette notion est également utile en mécanique pour exprimer le comportement des ondes aux interfaces entre milieux différents. Par analogie à la situation électrique, l'impédance mécanique est définie comme le rapport :

$$Z_{méc} = \frac{Force\,ou\,pression\,dans\,le\,milieu\,due\,à\,l'onde}{réponse\,du\,milieu\,(sa\,vitesse\,vibratoire)} = \frac{F}{V}$$

Pour les ondes sonores dans les gaz, on utilise le terme « **impédance acoustique** ».[1]. Dans le cas d'une onde harmonique plane créant dans le milieu une pression acoustique P_a qui entraîne un mouvement des particules de vitesse v , l'**impédance acoustique** est définie comme $Z_a = \frac{P_a}{v}$ exprimée en Pa.s/m et qui ne dépend que des caractéristiques du milieu. L'impédance acoustique est une grandeur utile dans la description des réflexions aux interfaces entre milieux différents.

Considérons une onde acoustique se propageant le long d'un milieu élastique à une dimension. Le déplacement *u(x,t)* de la tranche de matériau d'abscisse *x* est donné par : $u(t,x) = A\sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{c_s}\right)\right]$

La vitesse vibratoire *v* correspondante est obtenue par l'expression :

[1] Introduction à l'acoustique, André Brau, Vuibert 1012

$$v = \frac{\partial u}{\partial t} = A\omega \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{c_s}\right)\right] = V\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{c_s}\right)\right]$$

(6.1) $$v = \frac{\partial u}{\partial t} = A\,\omega \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{c_s}\right)\right] = V\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{c_s}\right)\right].$$

La pression acoustique correspondante est égale à :

(6.2) $$p_a = K\frac{\omega}{c_s}\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{c_s}\right)\right] = P_a\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{c_s}\right)\right].$$

On voit que v et p_a sont proportionnelles et vibrent en phase.

Nous avons montré que pour les gaz parfaits, la célérité de l'onde est donnée par : $c_s = \sqrt{K/\rho}$, ce qui permet d'écrire $K = \rho c_s^2$. On en déduit une expression pour l'impédance caractéristique du milieu :

(6.3) $$Z = \frac{P_a}{V} = \frac{K}{c_s} = \sqrt{K\rho} = \rho c_s \quad .$$

L'impédance d'un milieu est d'autant plus grande que le milieu est moins compressible et plus dense ; de façon générale, l'impédance d'un gaz est moins grande que celle d'un liquide, elle-même moins grande que celle d'un solide.

Il y a analogie entre l'impédance acoustique et l'impédance d'une ligne électrique. Z décrit le couplage entre deux grandeurs caractéristiques de l'onde, ici la pression et la vitesse vibratoire. Notons encore que l'impédance change de signe avec le sens de propagation. Si l'onde se propage dans le sens $-x$, la célérité est $-c_s$, et l'impédance est égale à $Z = -\rho c_s$.

Pour l'air à 20°C, Z = ρc_s = 413 kg.m^{-2}.s^{-1} (ou Pa.s.m^{-1}).

Pour l'eau on trouve : Z = 1,4.10^{6} kg.m^{-2}.s^{-1}.

6a-.2.2. IMPÉDANCE CARACTÉRISTIQUE D'UN TUYAU SONORE.

Lorsque l'onde se propage dans un tuyau de section constante S dans lequel circule un fluide, on utilise la notion d'impédance caractéristique (ou spécifique) du tuyau. Si S est la section du tuyau, on peut définir

- une **impédance mécanique** du tuyau :

$Z_m = \dfrac{S\,p_a}{v} = S\,Z$ Z étant l'impédance acoustique du milieu

et une impédance hydraulique (parce qu'elle fait intervenir le débit du fluide)

$Z_h = \dfrac{p_a}{S\,v_t} = \dfrac{Z}{S} = \dfrac{\rho\,c_s}{S}$ v étant la vitesse vibratoire et c_s, la célérité des ondes acoustiques dans le milieu. Z_h ou Z_c est appelée impédance acoustique caractéristique (de l'ensemble tuyau-milieu gazeux). La grandeur $S\ v_l$ correspond au débit volumique acoustique (m^3.s^{-1}) à l'entrée du tuyau ; cette grandeur est conservée le long du tuyau qui peut avoir une section variable.

Remarques :

1 : L'impédance ci-dessus a été définie pour une onde se propageant dans le sens – vers + (onde progressive directe). Pour l'onde régressive, se propageant dans l'autre sens, la vitesse changeant de signe, l'impédance caractéristique devient :

$$Z_{o.rég} = \frac{p_a}{S\, v_t} = -\frac{\rho\, c_s}{S} = -Z_{o.pr}$$

2 : L'extrémité est un point particulier caractérisé par une **impédance d'extrémité** :

$$Z_{extr} = \frac{p_{extr}}{S\ \ v_{extr}}$$

6a-.3. ONDE MÉCANIQUE : FACTEUR DE RÉFLEXION ET DE TRANSMISSION À UNE INTERFACE, INCIDENCE NORMALE.

6a-.3.1. CONDITIONS DE CONTINUITÉ À L'INTERFACE

Considérons le cas d'une onde acoustique plane en incidence normale ; cette étude s'applique aux ultrasons, mais pas aux interfaces air-solide dans le cas de l'acoustique des bruits.

Comment le changement d'impédance influe-t-il sur la répartition des énergies entre les trois ondes ? Pour répondre à la question examinons les conditions sur la vitesse des particules à l'interface et sur la pression.

Soit une onde élastique se propageant le long d'un milieu à une dimension (poutre). Le milieu est constitué de deux matériaux d'impédance $Z_1 = \rho_1 c_1$ et $Z_2 = \rho_2 c_2$ et séparés par une interface normale à la direction de propagation. L'onde incidente (O_i) à l'interface génère deux ondes : une onde transmise (O_t) qui transporte une partie de l'énergie dans le deuxième milieu et une onde (O_r) qui repart dans le premier milieu.

Les différentes ondes à l'interface sont données par les expressions suivantes :

(6.4) Pour l'onde incidente : $u_i = U_i \ \sin \omega \left(t - \frac{x}{c_1} \right)$;

(6.5) Pour l'onde réfléchie : $u_r = U_r \ \sin \omega \left(t + \frac{x}{c_1} \right)$

(6.6) Pour l'onde transmise : $u_t = U_t \ \sin \omega \left(t - \frac{x}{c_2} \right)$.

Pour décrire le passage de l'onde à travers l'interface, on définit les coefficients suivants : le facteur de transmission des déplacements $t_s = \frac{U_t}{U_i}$, le facteur de réflexion des déplacements $r_s = \frac{U_r}{U_i}$, le facteur de transmission des intensités $T_I = \frac{I_t}{I_i}$ et le facteur de réflexion des intensités $R_I = \frac{I_r}{I_i}$.

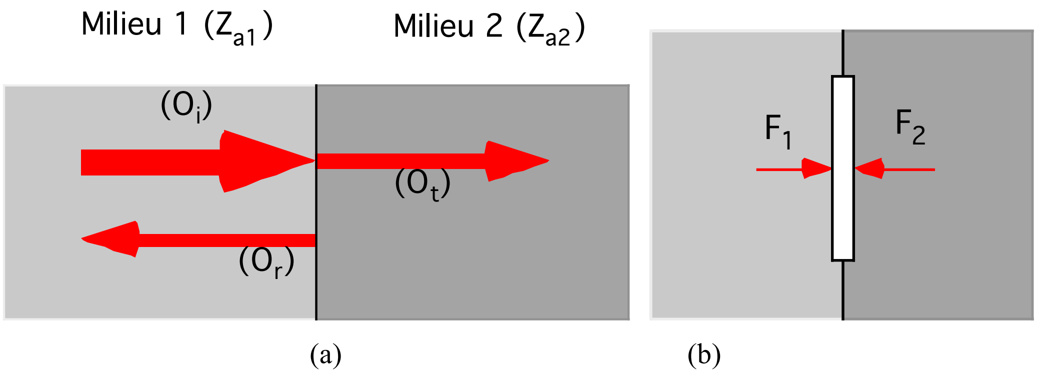


Fig. 6-1 : (a) Réflexion et transmission à une interface entre deux milieux d'impédances différentes. (b) Forces agissant sur une mince couche à l'interface.

A l'interface les conditions suivantes sont observées :

- continuité des déplacements et des vitesses,
- continuité des contraintes et des pressions,
- continuité de l'énergie (en supposant que les milieux ne sont pas absorbants).

Il y a continuité pour le déplacement et la vitesse car un point de l'interface peut être considéré comme commun aux deux milieux :

(6.7) $u_1 = u_2$ ou $u_i + u_r = u_t$ à tout instant, ce qui implique que l'égalité est vérifiée pour l'amplitude :

(6.8) $U_i + U_r = U_t$.

La condition de continuité sur les pressions s'écrit :

(6.9) $p_i + p_r = p_t$ ou, en utilisant la relation, $p = -\frac{1}{\chi}\frac{\partial u}{\partial x}$,

(6.10) $\frac{u_i}{\chi_1 c_1} + \frac{u_r}{\chi_1 c_1} = \frac{u_t}{\chi_2 c_2}$.

Pour justifier la continuité pour la pression, considérons une tranche de très faible épaisseur, de masse m, d'aire S située sur l'interface (figure ci-dessus). Cette couche est soumise à deux forces. La force résultante est équilibrée par la force d'inertie, suivant le principe fondamental de la dynamique :

(6.11) $(p_1 - p_2)\ S = m\ .\ \frac{dv}{dt}$.

En faisant tendre l'épaisseur de la tranche vers zéro, la masse m tend également vers zéro, ainsi que la différence de pression, ce qui signifie que $p_1 = p_2$ à l'interface, ce qui permet d'écrire la deuxième condition à la limite des deux milieux :

(6.12) $p_i + p_r = p_t$ à tout instant, ce qui signifie que $P_i + P_r = P_t$.

La continuité pour les vitesses s'écrit :

(6.13) $v_1 = v_2$ *ou* $v_i + v_r = v_t$ ou $V_i + V_r = V_t$.

6a-.3.2. FACTEUR DE RÉFLEXION ET DE TRANSMISSION POUR LE DÉPLACEMENT.

Les coefficients de réflexion et de transmission pour les déplacements ou les vitesses sont donnés par

(6.14) $r_u = \frac{u_r}{u_i}$ et $t_s = \frac{u_t}{u_i}$.

En utilisant les relations de continuité et la relation $Z = \dfrac{P_a}{V} = \dfrac{1}{\chi \; c} = \sqrt{\dfrac{\rho}{\chi}} = \rho c$, on obtient les coefficients r_u et t_s.

En tenant compte du fait que pour une onde progressive se déplaçant dans le sens contraire de l'orientation de l'axe l'impédance est égale à –Z, la continuité de pression s'écrit :

(6.15) $Z_1 v_i - Z_1 v_r = Z_2 v_t$ ou $Z_1 V_i - Z_1 V_r = Z_2 V_t$.

Les relations de continuité deviennent :

(6.16) $1 + r = t$ et $Z_1(1 - r) = Z_2 t$ soit,

(6.17) $r_u = \dfrac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}$ et $t_u = \dfrac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}$.

<u>Remarques</u>

• Dans le cas général on a $r_u + t_u \neq 1$.

• L'onde transmise est toujours en phase avec l'onde incidente.

• Si $Z_1 > Z_2$, le coefficient de réflexion est positif, cela signifie que le déplacement dû à l'onde réfléchie se fait dans le même sens que celui de l'onde incidente.

• Si $Z_1 < Z_2$, le coefficient de réflexion est négatif, ce qui signifie qu'il y a un changement de signe (ou un déphasage de π) à la réflexion.

• Il n'y a pas d'onde réfléchie si les deux milieux ont la même impédance ; on dit qu'il y adaptation des impédances.

6a-.3.3. FACTEUR DE RÉFLEXION ET DE TRANSMISSION POUR LES PRESSIONS

Les détecteurs d'ondes acoustiques étant sensibles à la pression, il est utile d'introduire les coefficients de réflexion et de transmission en pression :

(6.18) $r_p = \dfrac{p_r}{p_i}$ et $t_p = \dfrac{p_t}{p_i}$.

En utilisant la continuité des vitesses vibratoires ($V_i + V_r = V_t$), on obtient :

(6.19) $\dfrac{p_i}{Z_1} - \dfrac{p_r}{Z_1} = \dfrac{p_t}{Z_2}$ ou $Z_2(p_i - p_r) = Z_1 p_t$

En ajoutant la continuité des pressions ( ), on obtient les expressions pour r_p et t_p:

(6.20) $r_p = \dfrac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2}$ et $t_p = \dfrac{2Z_2}{Z_1 + Z_2}$.

<u>Remarques</u>

• Si $Z_1 > Z_2$, (interface eau->air) le coefficient de réflexion est négatif, ce qui signifie qu'il y a un changement de signe de l'onde de pression (ou un déphasage de π) à la réflexion.

• Si $Z_1 < Z_2$, le coefficient de réflexion est positif, l'onde de pression ne change pas de signe à la réflexion (NB : pour l'onde de déplacement, c'est l'inverse).

6a-.3.4. FACTEUR DE TRANSMISSION EN ÉNERGIE

Les facteurs de transmission de réflexion et de transmission en intensité sont définis comme

(6.21) $R_I = \dfrac{I_r}{I_i}$ et $T_I = \dfrac{I_t}{I_i}$.

Les intensités étant proportionnelles au carré des amplitudes, il en résulte les expressions suivantes, en supposant qu'il n'y a pas de pertes à l'interface ($R_I + T_I = 1$) :

$$(6.22) \quad R_I = (r_u)^2 = \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}\right)^2 \text{ et } T_I = 1 - \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}\right)^2 = \frac{4Z_1Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2}.$$

On voit d'après la relation ci-dessus, que pour augmenter la transmission il faut rapprocher Z_1 et Z_2 c'est-à-dire adapter les impédances. Dans les problèmes de propagation acoustique à travers des parois (problèmes de bruits), d'autres phénomènes comme les vibrations des cloisons viennent compliquer le problème et R_I est plus important que celui obtenu par la formule ci-dessus.

6a-.3.5. FACTEUR DE RÉFLEXION ET DE TRANSMISSION D'UNE COUCHE MINCE. COUCHE ANTI-RÉFLÉCHISSANTE

Les réflexions aux interfaces sont en général gênantes. Comment les supprimer ou au moins les diminuer ? Une solution consiste à utiliser l'action d'une couche d'adaptation qui permet le passage de l'énergie du premier milieu au deuxième dans certaines conditions. Considérons le dispositif suivant.

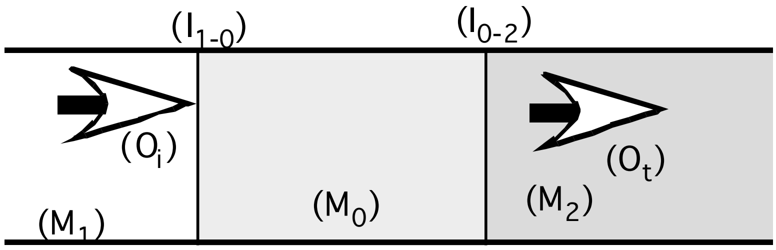


Fig. 6-1 : Onde passant d'un milieu à un autre à travers une couche d'adaptation.

Une onde plane se propage avec une célérité c_1 dans un milieu de masse volumique ρ_1 et passe dans un deuxième milieu de masse volumique ρ_2 dans lequel la célérité est c_2. Les deux milieux sont séparés par une couche mince d'épaisseur e caractérisée de masse volumique ρ_0 dans laquelle la célérité est c_0. Les réflexions sur les interfaces (I_{1-0}) et (I_{0-2}) sont données par les impédances caractéristiques Z_1 , Z_0 et Z_2 des milieux. Un choix approprié de l'épaisseur et de la densité du milieu constituant la couche intermédiaire, permet de diminuer, voire de supprimer la réflexion ; toute l'énergie de l'onde est alors transmise dans le milieu 2.

6a-.3.6. APPLICATION : ÉCHOGRAPHIE MÉDICALE

La détection réflexions des ondes élastiques est utilisée en médecine pour explorer l'intérieur du corps de façon non invasive. Un exemple d'utilisation en obstétrique est illustré ci-après.

Le palpeur comporte un élément piézo-électrique jouant successivement le rôle d'émetteur et de récepteur ultrasonore. Pendant une durée de quelques microsecondes, le disque piézo est excité par une tension électrique à la fréquence de quelques MHz. Il vibre alors à cette fréquence, créant un train d'ondes ultrasonores se propageant à travers le liquide de couplage, puis à travers l'organisme du patient.

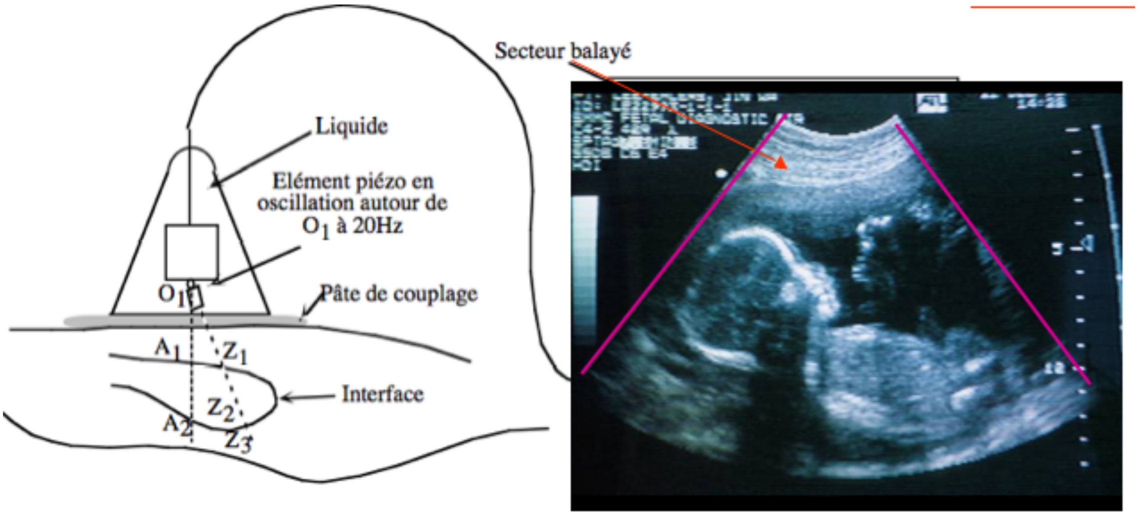


Fig. 6-1 : Schéma d'un dispositif d'échographie médicale par ultrasons. La pâte de couplage permet une bonne transmission des ondes à l'intérieur du corps (adaptation d'impédance).

Aussitôt après l'émission, le générateur est coupé ; une horloge électronique est déclenchée et la sonde est alors " en écoute".

A chaque interface caractérisée par un changement d'impédance ($Z_1 \neq Z_2$), une partie de l'énergie de l'onde ultrasonore est réfléchie. L'énergie réfléchie est renvoyée vers la sonde et vient l'exciter avec un retard qui est mesuré de $\Delta t = 2\frac{O_1A_1}{c_m}$, c_m étant la célérité moyenne dans le milieu traversé.

L'excitation mécanique de l'élément piézo par l'onde retour crée une oscillation électrique à ses bornes. Celle-ci est dirigée vers l'unité de visualisation. Les différents retards correspondant aux divers organes (ou interfaces) traversés sont mis en mémoire. Le processus se répète pour une nouvelle position angulaire de l'élément piézo. Un secteur d'environ 50° est ainsi balayé en 50 ms environ.

La position angulaire de l'axe d'émission de l'élément piézo est simulée en temps réel sur l'écran de visualisation. Pour chaque position angulaire on simule également, par une surbrillance les durées de parcours Δt. On obtient ainsi une 'image' qui est une véritable coupe à travers l'organisme par le plan dans lequel oscille l'axe d'émission de l'élément piézo.

6a-.4. ONDES STATIONNAIRES

6a-.4.1. ONDE STATIONNAIRE : LA SUPERPOSITION D'ONDES PROGRESSIVES

Lorsqu'une onde progressive se superpose avec l'onde réfléchie, il se produit une interférence. Les fréquences auxquelles les ondes stationnaires se produisent sont les fréquences naturelles ou de résonance du milieu (corde, piston à gaz, poutre, ..). Le phénomène d'interférence fait apparaître des points où la vibration s'annule (nœuds) et des points où l'amplitude est maximale (ventres ou anti nœuds).

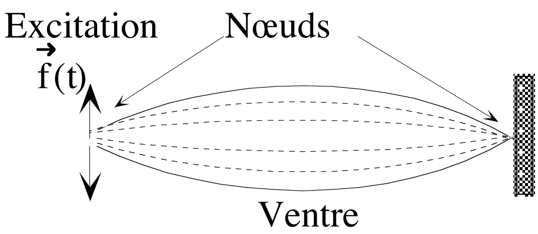
Les ondes stationnaires se produisent aux fréquences naturelles (ou fréquences propres) de la structure considérée (corde, poutre élastique, gaz dans un tuyau, ...). C'est un phénomène de résonance qu'il est facile d'observer sur une corde tendue. Aux fréquences propres, il faut peu d'effort pour conférer au milieu une grande amplitude. La fréquence la plus basse de vibration est appelée fréquence fondamentale. Dans le cas d'une corde tendue, c'est celle pour laquelle la longueur de la corde est égale à une demi-longueur d'onde. Dans ce cas l'onde stationnaire présente un seul ventre et deux nœuds (figure). Les autres fréquences de résonance sont des multiples entiers de la fréquence fondamentale. Les ondes stationnaires correspondent aux cas où il est possible de disposer le long de la corde un nombre entier de demi longueurs d'onde, soit pour une corde de longueur L :

(6.23) $$L = n \frac{\lambda_n}{2}$$

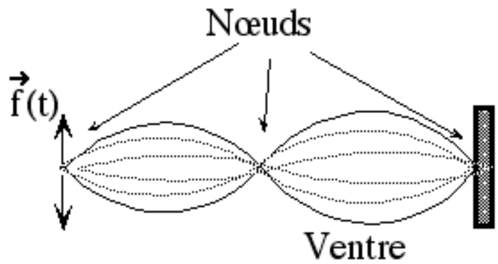
n correspond au numéro de l'harmonique. En inversant la relation ci-dessus, et en tenant compte de l'expression pour la vitesse de propagation d'une perturbation ou d'une onde le long d'une corde, on obtient l'expression suivante pour les fréquences des ondes stationnaires :

(6.24) $$f = n\frac{v}{2L} = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{F_t}{\mu}}\ .$$

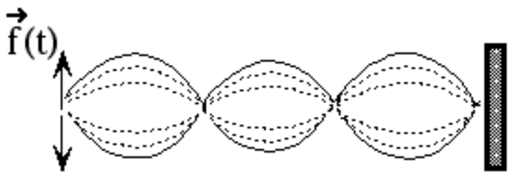
(6.25)



a)



(b)



(c)

Fig. 6-2 : Ondes stationnaires le long d'une corde de longueur L, excitée aux fréquences de résonance. En pratique, pour faire apparaître les fréquences propres, on peut utiliser une corde fixée aux 2 extrémités et exciter la corde en un endroit quelconque. (a) Fondamentale (ou 1ère harmonique) $L = \frac{1}{2}\lambda_1$ (b) 2ème harmonique $L = \lambda_2$ (c) 3ème harmonique $L = \frac{3}{2}\lambda_3$

Considérons une corde élastique disposée suivant un axe X'OX soumise à des déformations transversales. L'expression pour les mouvements des différents points d'une corde en présence d'une onde stationnaire peut être obtenue en additionnant les 2 ondes progressives, l'onde incidente et l'onde réfléchie, qui sont à son origine. Soit $u_i(x,t)$ le déplacement des points de la corde dû à l'onde incidente. $u_i(x,t)$ est décrit par l'expression $u_i = U_i \sin(\omega t - kx)$

Pour l'onde réfléchie, on a : $u_r = U_r \sin(\omega t + kx)$ en supposant qu'il n'y a pas d'amortissement et que l'onde est totalement réfléchie. La superposition des 2 ondes donne une onde d'amplitude :

(6.26) $$u(x,t) = u_i + u_r = U\left[\sin(\omega t - kx) + \sin(\omega t + kx)\right]$$ ou

$$u(x,t) = 2U\left[\sin(\omega t)\cos(kx)\right]$$

Dans le cas où on impose une amplitude nulle aux deux extrémités (à x = 0 et x = L), l'équation ci-dessus sera vérifiée pour $kL = n\pi$, n étant un nombre entier. Cette condition est celle des ondes stationnaires. Le mouvement d'un point de la corde est alors un mouvement harmonique simple et tous les points de la corde vibrent à la même fréquence. L'amplitude de la vibration dépend de la position le long de la corde et certains points restent immobiles (les nœuds mentionnés plus haut). L'amplitude maximale est obtenue pour les positions x telles que $x = \lambda/4 \,,\, \frac{3\lambda}{4} \,,\, 5\lambda/4 \,,\, \ldots$

D'un point de vue énergétique, dans le cas de l'onde stationnaire, l'énergie ne se propage pas le long du milieu, mais est répartie à l'intérieur de celui-ci. La répartition ne varie pas dans le temps.

6a-.4.2. ONDES STATIONNAIRES DANS LES TUYAUX.

Comme vu ci-dessus, une onde sonore subit une réflexion à chaque fois que l'impédance du milieu dans lequel elle se propage varie brusquement C'est le cas aux extrémités des tuyaux, qu'ils soient fermés ou ouverts. Il se crée alors des ondes stationnaires qui favorisent certaines fréquences. Les instruments à vent utilisent ce phénomène.

Dans le cas d'un tuyau fermé à une extrémité et ouvert à l'autre, une onde stationnaire se forme avec un nœud de pression au contact de la paroi de fermeture et un ventre de pression à l'extrémité ouverte. Cette situation se produit pour une onde qui parcourt une demi longueur d'onde en faisant un aller-retour dans le tube.

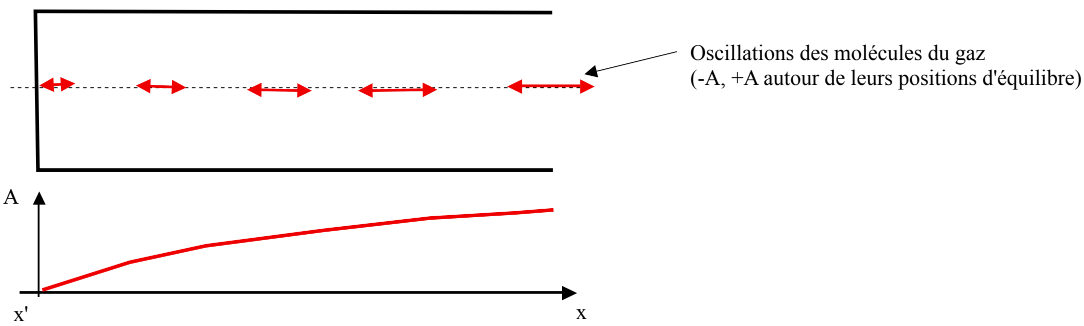


Fig. 6-2 : Oscillation du gaz dans un tuyau fermé à une extrémité et fermé à l'autre : mode fondamental

Dans le cas illustré sur la figure ci-dessus, la fréquence est égale à $f_0 = \frac{c}{4L}$ en supposant que la réflexion a lieu exactement à l'extrémité, ce qui n'est pas tout-à-fait le cas (voir la discussion dans [*Benson-3.09 - p80*]). La figure ci-après montre les 3 premiers modes d'oscillation d'un tuyau ouvert à une extrémité. Les fréquences sont données par $f_n = n\frac{c}{4L}$ avec n=1, 3, 5.

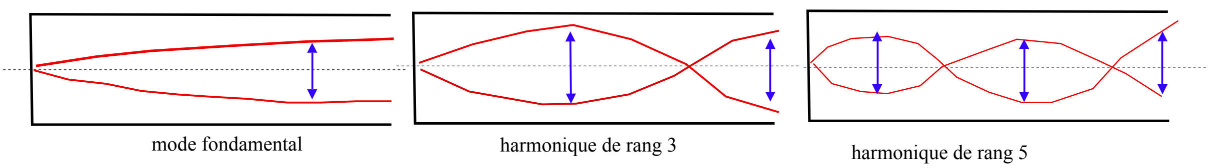


Fig. 6-3 : Premiers modes d'un tuyau ouvert à une extrémité, fermé à l'autre.

Pour un tuyau ouvert aux 2 extrémités, on aurait des ventres de déplacement de chaque côté et des fréquences de résonance données par $f_n = n\frac{c}{2L}$ avec n=1,2, 3, ...