

5.b ONDES PROGRESSIVES. Cas électriques et électromagnétiques.

5b-1. ONDES ÉLECTRIQUES.

5b-1.1. INTRODUCTION

Les charges électriques (électrons, atomes ou molécules ionisées, « trous » dans les cristaux semi conducteurs) sont à l'origine d'une modification de l'espace qui les entourent. Cette modification apparaît sous la forme de champs : champ électrique lorsque les charges sont immobiles, champ magnétique lorsqu'elles sont en mouvement. Les perturbations introduites dans ces champs se propagent sous la forme d'onde. L'action de ces ondes sur la matière dépend de la fréquence des oscillations. Les oscillations des électrons dans les milieux conducteurs sont une situation particulière qu'on décrit comme des ondes électriques. La nature ondulatoire du phénomène se manifeste d'autant plus que la fréquence d'oscillation est grande, dans la mesure où ces ondes se propagent très vite (proche de la vitesse de la lumière, égale à 300 000 km/s dans le vide) à l'échelle des circuits et des appareils courants.

5b-1.2. SYSTÈME D'OSCILLATEURS ÉLECTRIQUES FORMÉ D'UN GRAND NOMBRE DE MAILLES DE TYPE LC.

Un circuit électrique comprenant au moins une inductance et un condensateur se comporte en oscillateur. Les oscillations libres de courant vérifient l'équation

$$(6.1) \quad \frac{d^2 i}{dt^2} + \omega_0^2 i = 0$$

où $\omega_0 = \sqrt{1/LC}$ est la pulsation propre d'oscillation.

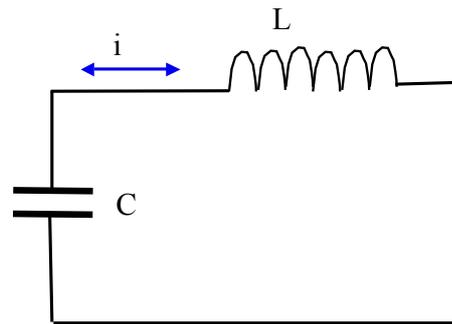


Fig. 6-1 : Oscillateur électrique élémentaire

Si on relie entre eux un ensemble de circuits oscillants comme indiqué ci-après, on obtient un système couplé caractérisé par un ensemble de fréquences propres d'oscillation.

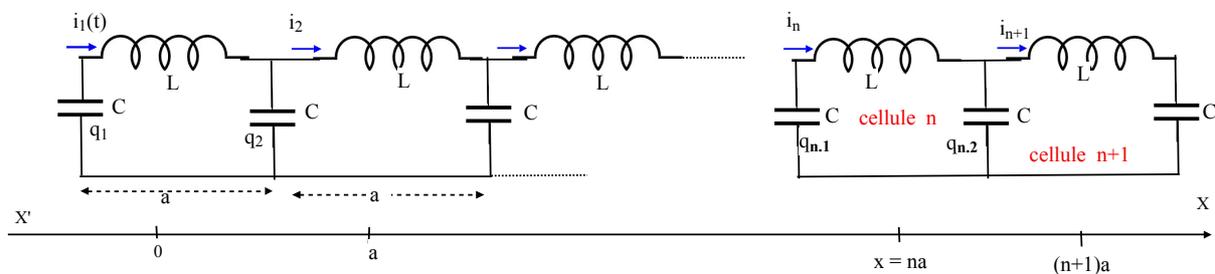


Fig. 6-2 : Circuit constitué de n+1 oscillateurs couplés.

La force électromotrice aux bornes de la n-ième inductance est donnée par :

$$(6.1) L \frac{di_n}{dt} = \frac{q_{n,2}}{C} - \frac{q_{n,1}}{C}$$

où $q_{n,1}$ et $q_{n,2}$ sont respectivement les charges instantanées dans le condensateur d'entrée et le condensateur de sortie de la cellule d'indice n . Après dérivation, nous obtenons :

$$(6.2) L \frac{d^2 i_n}{dt^2} = \frac{1}{C} \frac{dq_{n,2}}{dt} - \frac{1}{C} \frac{dq_{n,1}}{dt}$$

En prenant en considération la conservation de la charge, nous obtenons :

$$(6.3) L \frac{d^2 i_n}{dt^2} = \frac{1}{C} (i_{n+1} - i_n) - \frac{1}{C} (i_n - i_{n-1})$$

On cherche une solution de la forme $i_n(t) = I \cos(\omega t - n \Phi)$, soit sous la forme complexe $i_n(t) = I_0 e^{-jn\Phi} e^{j\omega t}$, en appelant Φ le déphasage du courant entre l'oscillateur n et le suivant : $\Phi = \Phi_{n+1} - \Phi_n$. On introduit $k = \Phi/a$; k correspond à un déphasage par unité de longueur. La solution s'écrit alors :

$i_n(t) = [A \sin(nka) + B \cos(nka)] \cos(\omega(k)t + \varphi)$ où A et B sont des constantes qui dépendent des conditions aux limites, ce qui peut encore s'écrire :

$$i_n(t) = I_0 \cos(\omega t - k x_n)$$

Après réinjection de cette expression dans l'équation différentielle, on obtient l'équation de dispersion de la chaîne :

$$(6.4) \omega(k) = 2 \omega_0 \left| \sin \frac{ka}{2} \right| = 2 \sqrt{\frac{1}{LC}} \left| \sin \left(\frac{ka}{2} \right) \right|$$

Le terme ka n'est ici pas aussi bien justifié que dans le cas des pendules couplés ou de la corde élastique plombée. Nous pouvons tout de même dire qu'il s'agit de l'augmentation de phase observée en passant d'une inductance localisée à la suivante. La distance entre deux positions successives de même phase, correspond à une "longueur d'onde" (figure) $\lambda = 2\pi/k$.

En extrapolant vers un système continu dans lequel la taille d'une maille est négligeable, on peut écrire $i(x,t) = I_0 \cos(\omega t - k x)$.

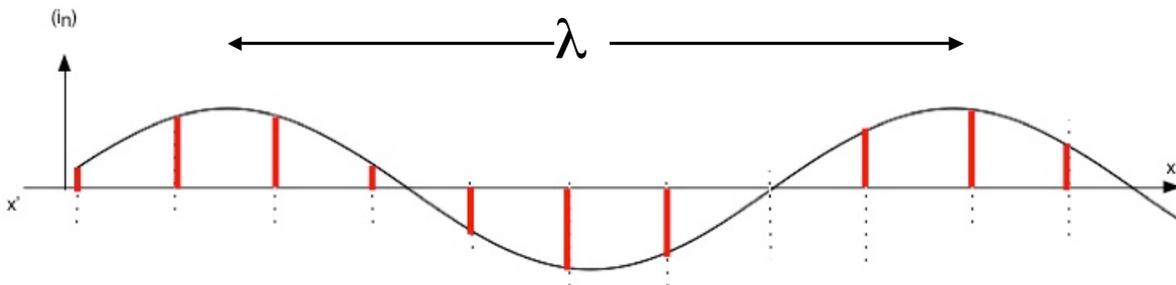


Fig. 6-3 : Répartition du courant à un instant donné le long de la chaîne.

5b-1.3. LIGNE DE TRANSMISSION FORMÉE D'UN NOMBRE INFINI DE CAPACITÉS ET D'INDUCTANCES.

Considérons maintenant un système infini de capacités et d'inductances excité à son extrémité par une tension harmonique $v(x=0, t) = v_0(t) = V_0 \cos(\omega t)$. Chaque cellule ou maille s'étend sur une longueur a ; la maille d'ordre $n+1$ se trouvant à la distance $x_n = (n+1).a$ du début de la chaîne.

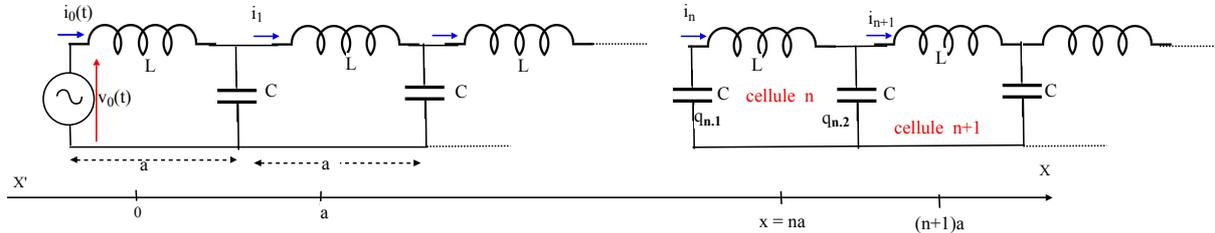


Fig. 6-4 : Chaîne de longueur infinie d'oscillateurs couplés.

Soient $i(x, t)$ et $v(x, t)$ les intensités et tensions à une position x donnée et un instant t . Cherchons la relation entre tension $v(x, t)$ et courant $i(x, t)$ à un instant t et à une position x quelconque sur la chaîne.

On cherche $i(x, t)$ sous la forme $i(x, t) = I_0 \cos(\omega t - kx) + J_0 \sin(\omega t - kx)$.

Considérons le cas limite dit des grandes longueurs d'ondes ($\lambda \gg a$) pour lesquelles $v(x, t)$ et $i(x, t)$ peuvent être assimilées à des fonctions continues de x .

Dans la cellule (1) $q_1 = C v_1(t)$ ou $= C v(x_1, t)$

$$C \frac{\partial v(x_1, t)}{\partial t} = \frac{dq_1}{dt} = i_1 - i_2 = - (i_2 - i_1) = - a \frac{\partial i(x_1, t)}{\partial x} \quad \text{déduite de l'approximation continue}$$

$$\text{ou encore} \quad \frac{\partial v(x_1, t)}{\partial t} = - \frac{1}{C/a} \frac{\partial i(x_1, t)}{\partial x}$$

$$\Rightarrow J_0 = 0 \quad \text{et} \quad - \omega V_0 \sin(\omega t - kx) = - \frac{1}{C/a} I_0 k \sin(\omega t - kx)$$

$$\text{soit} \quad V_0 = \frac{1}{C/a} I_0 \quad \text{ce qui donne} \quad V_0 = \frac{1}{C/a} i(x, t) = Z i(x, t)$$

Z est l'impédance caractéristique de la ligne et est donnée dans l'approximation continue par :

$$(6.5) \quad Z = \frac{1}{C/a} = \sqrt{\frac{L/a}{C/a}}$$

Nous avons vu au chapitre 4 (Oscillations des systèmes continus) que ce système électrique a un comportement oscillatoire analogue à celui d'un système mécanique constitué de $n+1$ oscillateurs $m-K$ couplés.

Le premier oscillateur étant au rang 0, l'oscillateur de rang n est à l'abscisse $x_n = n.a$; l'oscillation de courant de l'oscillateur de rang n présente un déphasage de $\Phi_n = n \Phi$ par rapport à l'oscillation du courant dans la maille 0. On peut écrire la phase au rang n sous la forme

$\Phi_n = \frac{\Phi}{a} x_n = k x_n$ en posant $k = \frac{\Phi}{a}$ en introduisant le paramètre k qui correspond alors à un déphasage par unité de longueur le long de l'axe $X'X$.

Dans le cas où le courant dans la maille de début varie suivant $i_0(t) = I_0 \cos(\omega t)$ la solution de l'équation différentielle pour le courant à la position n s'écrit : $i_n(t) = I_0 \cos(\omega t - k x_n)$ avec

$$(6.6) \quad \omega(k) = 2 \omega_0 \left| \sin \frac{ka}{2} \right| = 2 \sqrt{\frac{1}{LC}} \left| \sin \frac{ka}{2} \right|.$$

Cette relation dite de dispersion, est valable sur l'intervalle de pulsation $\left[0 \text{ à } \frac{2}{\sqrt{LC}} \right]$. Pour les pulsations faibles, nous pouvons remplacer $\sin \left(\frac{1}{2} ka \right)$ par $\frac{1}{2} ka$. En remplaçant dans l'expression de la dispersion, nous obtenons la vitesse de phase suivante :

$$(6.7) \quad v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{C}{a} \right) (L/a)}}$$

pour les ondes électriques se propageant dans un câble électrique. C/a et L/a sont respectivement la capacité et l'inductance par unité de longueur. Ces ondes sont dites non dispersives puisque la vitesse est indépendante de la fréquence d'excitation. La vitesse de phase se confond alors avec la célérité des ondes.

5b-1.4. ONDE PROGRESSIVE DANS UN CÂBLE MODÉLISÉ PAR DES CIRCUITS LC. ÉQUATION DES TÉLÉGRAPHISTES.

Équation des télégraphistes

Considérons un système continu constitué de deux fils parallèles, de diamètre $2a$ et séparés par une distance h telle que $2a \ll h$. La ligne est constituée d'éléments pouvant être assimilés à une association d'une inductance et d'une capacité comme indiqué sur le schéma ci-après.

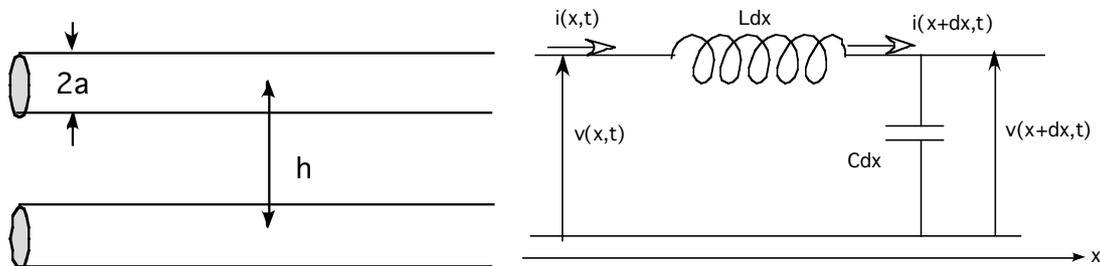


Fig. 6-5 : Ligne bifilaire et schéma d'un élément

La ligne est disposée le long d'un axe Ox . La capacité linéique C et l'inductance linéique sont données par :

$$(6.8) \quad C [F.m^{-1}] = \frac{\pi \epsilon_0}{\ln(h/a)} \quad \text{et} \quad L [H.m^{-1}] = \frac{\mu_0}{\pi} \ln(h/a). \quad \text{On suppose la ligne parfaite.}$$

Le produit $C L$ est égal à $\epsilon_0 \mu_0$ c'est-à-dire $\frac{1}{c^2}$ où c est la célérité de la lumière dans le vide.

Soient $v(x,t)$ la tension et $i(x,t)$ le courant dans la ligne, à une position x et à un instant t . v et i varient le long de la ligne et en fonction du temps. La chute de tension dans l'élément série (l'inductance) est donnée par (loi des mailles) :

$$(6.9) \quad v(x+dx,t) - v(x,t) = -L \frac{\partial i(x,t)}{\partial t} dx \quad \text{ce qui implique :}$$

$$(6.10) \quad \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} = -L \frac{\partial i(x,t)}{\partial t} .$$

Une relation analogue peut être établie pour le courant. Un élément dx de la ligne a une capacité Cdx et se charge donc d'une quantité $q(x,t) = Cdx v(x,t)$ ce qui correspond à une 'fuite' de courant donnée par $i(x+dx,t) - i(x,t) = - Cdx \frac{\partial v(x,t)}{\partial t}$ soit encore :

$$(6.11) \quad \frac{\partial i(x,t)}{\partial x} = -C \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} .$$

On dérive les deux équations (7.26) et (7.27) ci-dessus suivant x et t on obtient l'équation de l'onde électrique semblable à celle de d'Alembert et appelée ici l'**équation des télégraphistes** (pour une ligne sans pertes) :

$$(6.12) \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{1}{LC} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 .$$

La solution de cette équation s'écrit :

$$(6.13) \quad v(x,t) = V_0 \exp \left[j\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right] ;$$

$c = \sqrt{1/LC}$ est la célérité des ondes de courant et tension dans la ligne . En remplaçant L et C par leurs expressions en fonction des paramètres de ligne, on obtient une valeur pour c qui correspond à la célérité de la lumière dans le vide. L'onde électrique se déplace donc avec la même vitesse que les ondes électromagnétiques dans le vide. Cette vitesse est à distinguer de la vitesse vibratoire des électrons agités au passage de l'onde qui est de quelques millimètres par seconde.

Nous avons donc obtenu le résultat important ci-après. Si on considère un câble constitué de deux fils parallèles et qu'on applique un brusque changement de la tension à l'entrée, une impulsion électrique se propagera le long de la paire de fils à la vitesse de la lumière dans le vide.

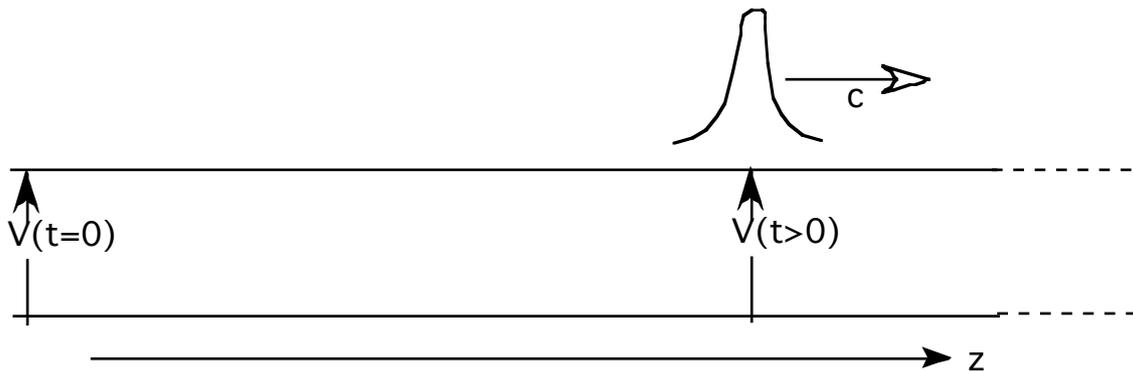
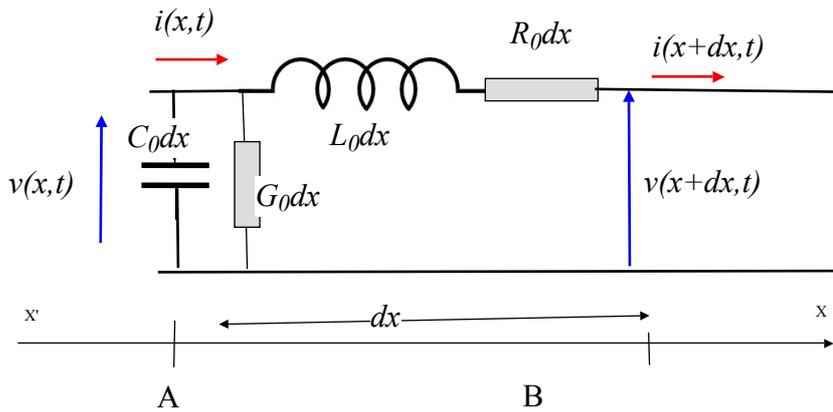


Fig. 6-6 : Une impulsion de tension le long d'une paire de fils parallèles se propage à la vitesse c de la lumière dans le vide.

Cas d'une ligne avec pertes :

Dans le cas d'une ligne avec pertes, l'élément de ligne peut être représenté comme ci-après. On ajoute une résistance $R_0 dx$ à l'inductance (R_0 = résistance par unité de longueur) et une conductance $G_0 dx$ en parallèle avec le condensateur (C_0 = conductance par unité de longueur)



Les lois des nœuds et des mailles donnent :

$$i(x+dx, t) = i(x, t) - G_0 dx u(x, t) - C_0 dx \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$u(x+dx, t) = u(x, t) - R_0 dx i(x, t) - L_0 dx \frac{\partial i}{\partial t}$$

qu'on peut écrire comme suit :

$$\frac{i(x, t) - i(x+dx, t)}{dx} = -\frac{\partial i}{\partial x} = G_0 u(x, t) + C_0 \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\frac{u(x, t) - u(x+dx, t)}{dx} = -\frac{\partial u}{\partial x} = R_0 i(x, t) + L_0 \frac{\partial i}{\partial t}$$

Après dérivée suivant t pour le courant et suivant x pour la tension, puis en éliminant l'intensité, on a :

$$(6.14) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - L_0 C_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - (R_0 L_0 + L_0 G_0) \frac{\partial u}{\partial t} - R_0 G_0 u = 0$$

(l'équation des télégraphistes pour une ligne avec pertes)

et en faisant l'inverse on a une équation identique pour i.

Le câble étant alimenté par un signal de pulsation ω , on cherche une solution de la forme

$$\widetilde{u}(x, t) = \widetilde{u}(x) \exp(j \omega t)$$

Après introduction dans l'équation ci-dessus on a :

$$\frac{d^2 \widetilde{u}(x)}{dx^2} + [L_0 C_0 \omega^2 - j\omega(R_0 C_0 + L_0 G_0) - R_0 G_0] \widetilde{u}(x) = 0$$

Par analogie avec l'équation de l'oscillateur à 1 ddl, la solution peut être cherchée sous la forme :

$\widetilde{u}(x) = U_0 \exp(rx)$, r étant la nouvelle inconnue, solution de l'équation caractéristique obtenue après introduction dans l'équation précédente :

$$\tilde{r}^2 + [L_0 C_0 \omega^2 - j\omega(R_0 C_0 + L_0 G_0) - R_0 G_0] = 0$$

$$\text{ce qui donne : } \tilde{r} = \pm [(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)]^{1/2}$$

La forme physique facile à interpréter pour la solution apparaît en écrivant $r = \pm jk = \pm(k' - jk'')$. L'expression pour $u(x,t)$ est alors :

$$\widetilde{u}(x,t) = U_0^+ \exp(-k''x) \exp[j(\omega t - k'x)] + U_0^- \exp(k''x) \exp[j(\omega t + k'x)]$$

Le 1^{er} terme correspond à une onde progressive atténuée, le second terme à une onde régressive, atténuée également. k'' (qu'on pourrait noter α ou γ) est le coefficient d'atténuation par unité de longueur.

Le rapport entre tension et courant pour l'onde progressive caractérise le câble et est appelé **impédance caractéristique** :

$$Z_{car} = \frac{\widetilde{u}^+(x,t)}{\widetilde{i}^+(x,t)} = \frac{U_0^+}{I_0^+}$$

On a la relation suivante entre u et i :

$$-\frac{\partial \widetilde{u}^+(x,t)}{\partial x} = R_0 \widetilde{i}^+(x,t) + L_0 \frac{\partial \widetilde{i}^+(x,t)}{\partial t}$$

ce qui donne après remplacement $j\tilde{k}\tilde{u}^+ = (R_0 + j\omega L_0)\tilde{i}^+$

et compte tenu que $j\tilde{k} = [(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)]^{1/2}$

$$\text{on a } Z_{car} = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}}$$

Dans le cas d'une ligne sans perte on a : $Z_{car} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$

Evolution de la puissance le long de la ligne avec pertes.

En écrivant la tension due à l'onde progressive sous la forme

$$\widetilde{u}(x,t) = U_0^+ \exp(-\gamma x) \exp[j(\omega t - k'x)]$$

on peut exprimer la puissance moyenne le long de la ligne. On a

$$\overline{P(x)} = \langle u(x) \rangle \langle i(x) \rangle = \frac{1}{2} U_0^+ I_0^+ \exp(-2\gamma x) = \frac{1}{2} \frac{(U_0^+)^2}{Z_{car}}$$

5b-1.5. ONDE ÉLECTRIQUE LE LONG D'UNE LIGNE DE TRANSMISSION FORMÉE DE 2 PLAQUES MÉTALLIQUES PARALLÈLES

Capacité linéique et inductance linéique de la ligne

Considérons le système électrique ci-après constitué de deux plaques métalliques parallèles, alimenté à son extrémité par une ddp harmonique $V(t)$. Les plaques ont une largeur w et sont séparées d'une distance d ; on suppose que d est petit devant w afin d'éviter les effets de bord.

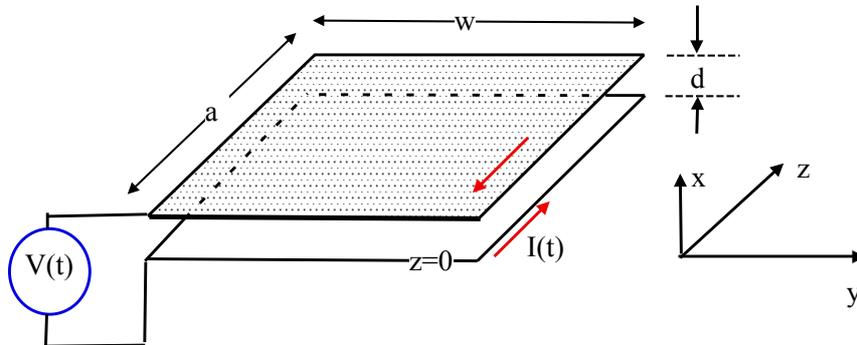


Fig. 6-7 : Ligne de transmission constituée de deux plaques parallèles.

Supposons que les plaques se touchent à l'infini de manière à avoir un circuit fermé (cette hypothèse n'enlève rien à la généralité du résultat). Soit Q la charge disposée sur une surface de plaque de largeur w et de longueur a (suivant Oz). Soit C la capacité de la surface considérée. Nous pouvons alors écrire :

$$Q = CV ; V = d E_x .$$

Le champ électrique E_x qui apparaît entre les plaques est donné par : $E_x = \frac{Q}{\epsilon_0 wa}$. Nous en

déduisons la capacité linéique : $\frac{C}{a} = \frac{w}{\epsilon_0 d}$.

Pour trouver l'inductance linéique, supposons que la plaque inférieure est reliée à la borne positive d'un générateur et la plaque supérieure, à la borne négative. Dans ce cas, un courant I positif s'écoule vers les z positifs sur la plaque inférieure et vers les z négatifs sur la plaque supérieure. Le champ magnétique entre les plaques est alors dirigé suivant les y positifs. A l'extérieur des plaques, le champ magnétique est nul. Le flux magnétique Φ à travers une section de l'inter plaque (de surface da) est donné par :

$$\Phi = d a B_y .$$

L'induction magnétique B_y est obtenue par : $w B_y = \mu_0 I$.

Soit L la self-inductance de la partie de plaque considérée, nous pouvons écrire :

$$L \frac{dI}{dt} = \frac{d\Phi}{dt}, \text{ soit pour un courant continu : } LI = \Phi .$$

Nous en déduisons l'inductance linéique : $\frac{L}{a} = \mu_0 \frac{d}{w}$

En calculant ainsi la self-inductance, nous négligeons la contribution due au courant de déplacement dE/dt . Cette approximation est valable si la distance entre les plaques est beaucoup plus petite que la longueur d'onde de l'onde électrique générée.

Impédance et puissance associée

La perturbation électrique introduite par la ddp à l'entrée se propage à une vitesse qui peut être déterminée en reportant les expressions pour C/a et L/a dans celle de la vitesse de phase trouvée précédemment ; nous trouvons à nouveau : $v_\varphi = c =$ Vitesse de la lumière dans le vide.

Ce résultat est général : la vitesse de phase d'une onde électrique se propageant dans un câble formé de deux conducteurs isolés, identiques, rectilignes et parallèles, placé dans le vide est égale à la vitesse de la lumière dans le vide.

En utilisant les expressions $\frac{C}{a} = \frac{w}{\epsilon_0 d}$ et $\frac{L}{a} = \mu_0 \frac{d}{w}$ on peut calculer l'impédance Z (en volts/ampère ou ohms) de la ligne : $Z = \sqrt{\frac{L/a}{C/a}} = \frac{d}{w} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$.

La puissance rayonnée par $P(t)$ par

$$(6.15) \quad P(t) = \frac{1}{Z} V^2(0,t) = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \frac{w}{d} V^2(0,t) .$$

La puissance excitatrice à l'entrée peut être exprimée en fonction de la composante non nulle E_x du champ électrique. On a $V(0, t) = d E_x(0, t)$

$$(6.16) \quad \Rightarrow P(t) = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} w d E_x^2(0,t)$$

$w d$ est la section de l'extrémité de la ligne. En divisant la puissance rayonnée par la section, on obtient une **intensité** notée $S(z, t)$, soit :

$$(6.17) \quad S(z,t) = \frac{P(z,t)}{w d} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_x^2(z,t) .$$

Dans la ligne considérée, l'induction magnétique a une composante non nulle $B_y(z, t)$ suivant y . Nous avons :

$$(6.18) \quad V = Z I \text{ et } d E_x = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \frac{d}{w} I .$$

L'induction magnétique est donnée par

$$(6.19) \quad w B_y = \mu_0 I .$$

Nous pouvons faire la conclusion suivante à partir des deux expressions ci-dessus.

Dans une onde plane progressive de rayonnement électro-magnétique se propageant suivant l'axe d'une ligne de transmission plan-parallèle, le champ électrique et l'induction magnétique sont perpendiculaires entre eux et à la direction de propagation et sont tels que : $\vec{E}_x(z, t) = c \vec{B}_y(z, t)$, (le produit $\vec{E} \times \vec{B}$ est orienté dans la direction de propagation).

5b-1.6. DE L'ONDE ÉLECTRIQUE À L'ONDE ÉLECTROMAGNÉTIQUE

Indice de réfraction et Dispersion

Dans l'exemple du câble de transmission plan-parallèle traité ci-dessus, nous n'avons considéré que l'espace entre les plaques est vide. Pour tenir compte de l'influence d'un milieu diélectrique qui séparerait les plaques, il suffit de multiplier la capacité C par la constante diélectrique relative ϵ_r et l'inductance par le coefficient de perméabilité magnétique μ_r .

Le résultat obtenu précédemment peut alors être généralisé.

Pour tout câble de transmission formé de 2 conducteurs isolés, identiques, rectilignes, parallèles, séparés par un matériau de constante diélectrique relative ϵ_r et de perméabilité magnétique μ_r la vitesse de phase d'ondes progressives est donnée par :
$$V_{\varphi} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}}$$

Nous avons introduit le résultat ci-dessus en partant d'ondes progressives de courant et de tension sur un câble de transmission. Ce résultat est valable cependant pour toutes les ondes ém se propageant dans la matière ; c'est valable en particulier pour se propageant dans un matériau transparent comme le verre. Dans le cas de la lumière le facteur $\sqrt{\epsilon_r \mu_r}$ est appelé indice de réfraction et désigné par **n**. Lors du passage du vide à un milieu diélectrique, le paramètre qui est modifié est la longueur d'onde λ et la vitesse de propagation qui passe de c à c/n :

$$(6.20) \quad \lambda_{\text{matériau}} = \frac{1}{n} \lambda_{\text{vide}} .$$

La fréquence de la force d'excitation n'est pas modifiée par la présence du matériau. Des effets spécifiques peuvent cependant être observés en présence d'un champ intense ; dans ce cas, à cause des non linéarités, de nouvelles fréquences peuvent apparaître.

La variation de l'indice avec la longueur d'onde correspond au phénomène de dispersion discuté plus haut. Une conséquence de la dispersion pour une onde ém traversant une surface entre deux milieux d'indices n_1 et n_2 , est la loi de Snell-Descartes (ou de réfraction) : des rayons parallèle sont déviés suivant la relation

$$(6.21) \quad n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$$

où i_1 et i_2 sont respectivement les angles d'incidence des rayons dans le premier et deuxième milieu.

Afin de déterminer en première approximation la variation de l'indice avec la fréquence, il suffit de considérer un modèle atomique simple et de le traiter dans le cadre de la mécanique classique.

Soit un condensateur rempli de diélectrique. Les différentes grandeurs à considérer sont :

- $E_Q(t)$ le champ dans le condensateur ou champ extérieur,
- $E(t) = - \frac{1}{\epsilon_0} P(t)$ le champ électrique local / intérieur
- $P(t) = N q x(t)$ le moment dipolaire induit par unité de volume.

La réduction du champ due à l'augmentation de polarisation entraîne une augmentation de C. Le facteur d'augmentation de C est la constante diélectrique, soit :

$$\epsilon_r = \frac{E_Q}{E} = 1 + \frac{P(t)}{\epsilon_0 E(t)} = 1 + \frac{N q x(t)}{\epsilon_0 E(t)} .$$

5b-1.7. INTERACTION ENTRE L'ONDE ÉM ET LA MATIÈRE AU NIVEAU MICROSCOPIQUE. MODÈLE SIMPLE IGNORANT LES ASPECTS QUANTIQUES.

Considérons une **molécule** présente dans un matériau comme le verre, soit un **noyau massif immobile** retenant une **charge** q de faible masse m relié par une force symbolisée par un '**ressort**' de constante $m\omega_0^2$ et de constante d'amortissement par unité de masse Γ . Le mouvement de la charge :

$$(6.22) \quad m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = - m\omega_0^2 x(t) - m\Gamma \frac{dx(t)}{dt} + qE(t)$$

Si le champ électrique extérieur varie à la pulsation ω , $P(t)$ et le champ local varie aussi à ω .

Champ sur une 'molécule moyenne' : $E(t) = E_0 \cos \omega t$.

La solution de l'équation de mouvement :

$$(6.23) \quad x(t) = A_{abs} \sin \omega t + A_{el} \cos \omega t \text{ avec}$$

$$(6.24) \quad A_{abs} = \frac{qE_0}{m} \frac{\Gamma \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2) + \Gamma^2 \omega^2} \text{ et}$$

$$(6.25) \quad A_{el} = \frac{qE_0}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) + \Gamma^2 \omega^2}$$

A_{abs} est l'amplitude d'absorption.

A_{el} est l'amplitude élastique (ou amplitude dispersive).

Loin des résonances le terme A_{abs} est négligeable et l'indice devient :

$$(6.26) \quad n^2 = \epsilon_r = 1 + \frac{N q x(t)}{\epsilon_0 E(t)} = 1 + N q \frac{A_{el}}{\epsilon_0 E_0} = 1 + \frac{Nq^2}{\epsilon_0 m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

(modèle simple à 1 seule résonance)

- Cas réel => ajouter à $n^2 - 1$ les contributions de toutes les résonances importantes.
- Pour le verre, résonances dans l'UV
- ω augmente $\Rightarrow n^2 - 1$ augmente (conforme à l'expérience : le bleu est plus dévié que le rouge).

5b-1.8. ONDES ÉM PLANES DANS LES MILIEUX TRANSPARENTS

Si le guide de transmission ci-dessus est rempli d'un diélectrique, on obtient :

$$(6.27) \quad S(z,t) = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_x^2(z,t) \quad \text{Le nouveau rapport } \mathbf{B}_y(z,t) / \mathbf{E}_x(z,t) :$$

$$(6.28) \quad c B_y = \sqrt{\epsilon_r \mu_r} E_x = n E_x .$$

5b-1.9. ONDES ÉM PLANES DANS LE VIDE ILLIMITÉ

A l'intérieur du guide plan l'onde est **plane** (les surfaces xy de phase constante ou **fronts d'onde** sont des plans). Il existe d'autres manières de produire des ondes ém planes, ou au moins pouvant être considérées comme telles sur une petite section.

Les ondes ém planes indépendamment de leurs fréquences, ont les propriétés suivantes :

- $\mathbf{E}(z,t)$ perpendiculaire à $\mathbf{B}(z,t)$ et perpendiculaires à Oz, la direction de propagation;
- $\mathbf{E}(z,t)$ est proportionnel à $\mathbf{B}(z,t)$;
- Le produit vectoriel $\mathbf{E}(z,t) \times \mathbf{B}(z,t)$ est dirigé suivant les z positifs (sens de propagation)
- La vitesse de phase est c (indépendance de la fréquence \Rightarrow non dispersive.)
- L'intensité instantanée ou flux énergétique (en $W.m^{-2}$) est égale à

$$(6.29) \quad S(z,t) = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E^2(z,t) = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} [E_x^2(z,t) + E_y^2(z,t)]$$

5b-2. LES ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES

5b-2.1. NATURE DE L'ONDE ÉLECTROMAGNÉTIQUE

Introduction

Les ondes électromagnétiques (ém) dont la nature a été comprise à la fin du 19^{ème} siècle avec en particulier Maxwell, sont omniprésentes dans les objets qui nous entourent. Un pas important dans leur maîtrise a été franchi en 1960 avec l'invention du laser, qui est pour la lumière, ce qu'est le transistor pour le courant électrique. La lumière laser et la lumière ordinaire, le rayonnement infra rouge ou ultra violet, les rayons X ou gamma, les ondes radio que nous utilisons pour communiquer, sont diverses manifestations d'une même forme d'énergie portée par les ondes appelées électromagnétiques, car produites par les oscillations des charges électriques dans la matière et se manifestant par la présence d'un champ électrique et d'un champ magnétique oscillant en phase.

Le spectre électromagnétique

Les ondes ém couvrent une large étendue spectrale allant des ondes de très basses fréquences rayonnées par les appareils électriques courants jusqu'aux ondes IR, visible, ou UV générées par les lasers, en passant par les ondes 'radio', les micro ondes, les ondes TeraHerz. La gamme de fréquences accessibles s'étend de 0,01 Hz à 10^{32} Hz, soient, en longueur d'ondes, 10^{10} à 10^{-24} m. La production d'ondes de très hautes fréquences (rayons X, rayons Gamma) nécessite des équipements complexes. L'interaction entre les ondes ém et la matière se manifeste de façon différente suivant la fréquence d'oscillation. A chaque domaine de fréquence correspondent des sources et des détecteurs. Certains domaines, comme celui des ondes TeraHertz sont encore mal maîtrisés, d'autres comme celui du domaine visible, continuent à évoluer, grâce à de nouvelles inventions. La plus récente concerne les émetteurs visibles de couleur bleue à base de semi-conducteur, particulièrement intéressante pour l'éclairage¹.

Le tableau ci-dessous présente les différents domaines des ondes ém.

Fréquence	Longueur d'onde	Domaine
0 à 10^{12} Hz	∞ à 0,3 mm	Ondes hertziennes
10^{12} à 4×10^{14} Hz	0,3 mm à 0,75 μ m	Infrarouge
4×10^{14} à 8×10^{14} Hz	0,75 mm à 0,4 μ m	Visible
$> 8 \times 10^{14}$ Hz	$< 0,4 \mu$ m	Ultraviolet, X, Gamma

5b-2.2. L'ONDE ÉLECTROMAGNÉTIQUE : CAS DE L'ONDE PLANE

Maxwell a apporté en 1873 une contribution essentielle à la compréhension de la nature de la lumière, en montrant que celle-ci est un cas particulier d'onde électromagnétique. Le cas le plus simple d'onde électromagnétique est celui d'une **onde plane, monochromatique, à polarisation rectiligne**. Le dessin ci-après est une représentation simplifiée de cette onde, où on a indiqué la direction Oz de la propagation de l'onde, et les directions du **champ électrique** \vec{E} et du **champ d'induction magnétique** \vec{B} qui lui sont associés.

¹ La découverte de l'émission de lumière bleue par des diodes à base de Ga-N a été récompensée par le prix Nobel 2014.

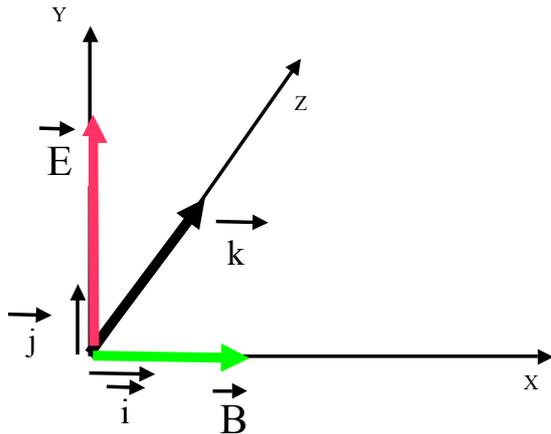


Fig. 6-8 : La lumière est une onde électromagnétique transverse

Dans sa représentation la plus simple, la lumière se caractérise par un champ électrique \vec{E} et un champ magnétique \vec{B} (perpendiculaire à \vec{E}) oscillant en phase dans un plan perpendiculaire à la direction de propagation (ici Oz). \vec{k} , orienté suivant la direction de propagation de l'onde est le vecteur d'onde.

Les champs \vec{E} et \vec{B} sont perpendiculaires entre eux et perpendiculaires à la direction de propagation, l'onde lumineuse étant une onde transverse.

Le champ électrique instantané \vec{e} en un point quelconque est décrit par l'expression :

$$(6.30) \quad \vec{e}(x,y,z,t) = E_0 e^{j(\omega t - kz)} \vec{j}$$

E_0 est l'amplitude du champ électrique,

\vec{j} est le vecteur unitaire suivant l'axe OY correspondant à la direction du champ électrique

ω est la pulsation (ou fréquence angulaire) de l'onde,

k correspond à la variation unitaire de la phase de l'onde dans la direction de propagation.

L'onde est dite plane parce qu'on suppose que la surface sur laquelle la phase est constante à un instant donné est un plan perpendiculaire à la direction de propagation ; l'amplitude est supposée constante dans ce plan. Ce cas est évidemment un cas idéal, une onde réelle ne pouvant ni être parfaitement monochromatique (une valeur unique pour ω), ni avoir une étendue infinie dans un plan transverse.

Le champ magnétique, orienté suivant l'axe OX, s'exprime de la même façon :

$$\vec{b}(x,y,z,t) = B_0 e^{j(\omega t - kz)} \vec{i}$$

\vec{i} est le vecteur unitaire suivant l'axe OX correspondant à la direction du champ magnétique et

B_0 est l'amplitude du champ électrique.

Les champs \vec{e} et \vec{b} vérifient les équations de Maxwell.

Par des transformations de ces équations on obtient l'équation de propagation du champ \vec{e} (resp. \vec{b}), qui pour le cas particulier de l'onde plane considérée ici, s'écrit :

$$(6.31) \quad \frac{\partial^2 \vec{e}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{e}}{\partial t^2} = 0 ;$$

$c = 3.10^8 \text{ m.s}^{-1}$ est la vitesse de propagation de l'onde électromagnétique dans le vide.

La solution de cette équation est l'expression introduite ci-dessus (8.1)

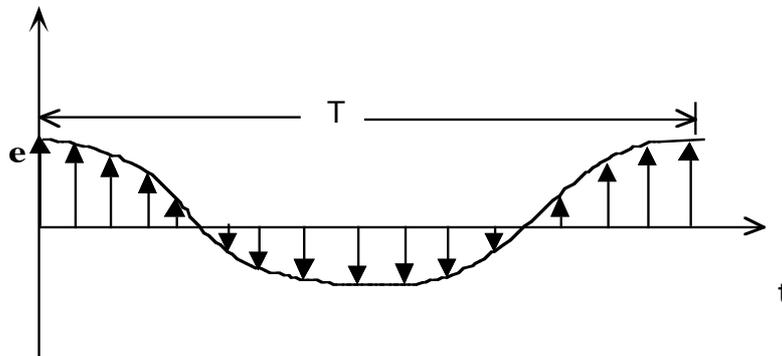
Le champ électrique étant la cause de la plupart des effets du rayonnement sur la matière (vision, photodétection, effets thermiques, etc.), on peut en pratique ne pas considérer le champ magnétique

pour décrire l'onde ém; les variations du champ magnétique se déduisent facilement de celles du champ électrique.

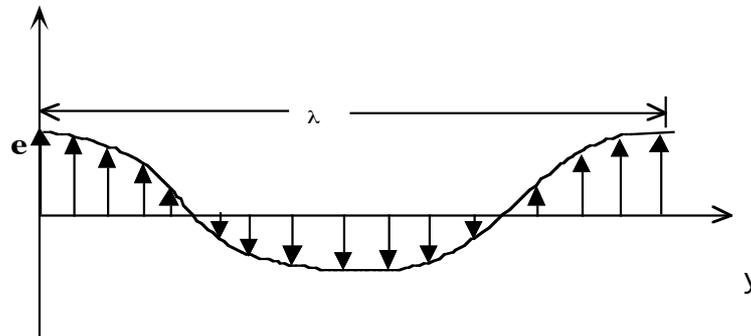
Pour indiquer la direction de propagation de l'onde, on introduit un vecteur \vec{k} appelé **vecteur d'onde**, orienté suivant OZ, et tel que $|\vec{k}| = \frac{\omega}{c}$. La distance de propagation sur laquelle la phase de l'onde varie de 2π est la **longueur d'onde** reliée à c et ω par $\lambda = 2\pi \frac{c}{\omega}$.

Une caractéristique importante de l'onde ém est sa **polarisation** définie par l'orientation du champ électrique. Nous avons considéré ci-dessus une polarisation rectiligne, cela signifie que le champ électrique est, en tout point, parallèle à une direction déterminée, ici l'axe OY. D'autres situations sont possibles et seront passées en revues plus loin.

Les variations temporelles et spatiales du champ électrique d'une onde ém plane et monochromatique sont représentées ci-après.



a) Variations temporelles du champ électrique d'une onde ém monochromatique plane. T est la période d'oscillation du champ (environ 5×10^{-15} s pour une onde dans le domaine du visible).



b) Variations spatiales du champ électrique d'une onde ém monochromatique plane. λ est la longueur d'onde (environ $0,5 \times 10^{-6}$ m pour une onde dans le domaine du visible).

Fig. 6-9 : a) Évolutions temporelles et spatiales du champ électrique d'une onde ém monochromatique plane.

5b-2.3. EQUATIONS DE MAXWELL

Les différents phénomènes liés à l'électricité, au magnétisme et à la lumière ont été rassemblés par J C Maxwell dans la 2^{ème} moitié du 19^{ème} siècle au sein d'un ensemble d'équations qui ont gardés son nom. Ces équations qui résument les lois de l'électromagnétisme s'écrivent sous la forme

différentielle (ou locale) comme suit dans le cas d'un espace vide (hormis les charges et courants à l'origine des champs).

$$\operatorname{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\text{Maxwell-Gauss}) \quad (\text{ou } \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0})$$

$$\overline{\operatorname{rot}(\vec{E})} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{ou } \nabla \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}) \quad (\text{Maxwell-Faraday})$$

$$\operatorname{div} \vec{B}(M) = 0 \quad (\text{ou } \nabla \cdot \vec{B} = 0) \quad (\text{Maxwell-Thomson})$$

$$\overline{\operatorname{rot}(\vec{B})} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

En présence de matière les équations de Maxwell s'écrivent de la façon suivante :

$$\operatorname{div}(\vec{D}) = \rho ; \overline{\operatorname{rot}(\vec{E})} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div}(\vec{B}) = 0 ; \overline{\operatorname{rot}(\vec{H})} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

\vec{D} est appelé **induction électrique** (également **déplacement électrique** ou **densité de flux électrique**) [C/m²] et donné par : $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}_e = \epsilon \vec{E}$ avec $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ et $\epsilon_r = 1 + \chi_{el} = n^2$. C'est le terme qui intègre les modifications de champ électrique en présence de matière.

5b-2.4. PROPRIÉTÉS DE L'ONDE ÉLECTROMAGNÉTIQUE

Principales caractéristiques de l'onde ém

L'onde ém se caractérise par :

- sa fréquence (ω ou ν),
- sa longueur d'onde λ pour un rayonnement monochromatique,
- le spectre $f(\lambda)$ ou $f(\nu)$ pour un rayonnement polychromatique,
- la répartition d'amplitude (propriétés spatiales)
- l'évolution dans le temps (continue ou pulsée),
- l'état de polarisation,
- la direction de propagation,
- la cohérence,
- la puissance et/ou l'énergie.

Divergence d'une onde électromagnétique.

Il existe une divergence minimale pour une onde passant à travers une ouverture. Ce résultat, bien connu en optique, peut être obtenu à partir de la relation d'incertitude entre les variables conjuguées k_x et x :

$$(6.32) \quad \Delta k_x \cdot \Delta x \geq \frac{1}{2}$$

Pour une onde à profil gaussien

$$(6.33) \quad E(y) = E_0 \exp \left[- \left(\frac{y}{w_0} \right)^2 \right],$$

le champ peut être décomposé en ondes planes dont les vecteurs d'onde se répartissent autour de la valeur $k_0 = 0$:

$$(6.34) \quad E(k_y) = \sqrt{\pi} w_0 E_0 \exp \left[- \left(\frac{k_y w_0}{2} \right)^2 \right]$$

Ce résultat montre qu'une onde à étendue transverse limitée se caractérise par un ensemble de vecteurs d'onde. L'onde gaussienne définie plus haut présente une divergence donnée par :

$$(6.35) \quad \frac{\theta_0}{2} = \frac{\Delta k_y}{k_z} = \frac{\lambda}{\pi w_0} \quad \text{soit} \quad \theta_0 = \frac{2 \lambda}{\pi w_0}$$

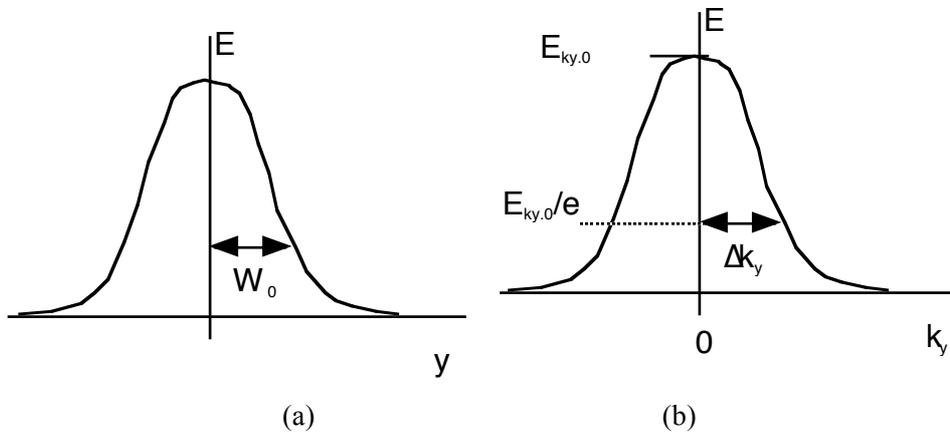


Fig. 6-10 : Faisceau gaussien – (a) dans l'espace réel – et (b) dans l'espace des vecteurs k.

Cohérence d'une onde ém.

Une onde ém réelle est générée par un ensemble d'oscillateurs élémentaires. Le degré de corrélation entre les vibrations des différentes sources détermine le degré de cohérence du rayonnement obtenu par superposition de toute les ondelettes.

Le degré de cohérence d'une onde ém peut être mesuré au moyen d'un interféromètre de Michelson. L'intensité dans le bras de recombinaison est donnée par

$$I(x) \propto \cos^2 \left[\frac{k \theta x}{2} + k \delta L + \frac{\delta \Phi}{2} \right]$$

où x est la coordonnée sur l'écran d'observation, θ le décalage angulaire entre les deux bras, δL la différence de longueur entre les deux bras et $\delta \Phi$ la différence de phase entre les deux ondes. La différence de phase varie très rapidement au rythme des émissions des sources élémentaires; il en résulte une diminution du contraste des franges d'interférence. Les fluctuations de $\delta \Phi$ sont équivalentes à une incertitude sur la fréquence de l'onde. C'est donc l'étendue du spectre de l'onde qu'il faut considérer pour déterminer son degré de cohérence. La longueur de cohérence L_{coh} mesurée dans l'interféromètre de Michelson ($L_{coh} = 2 \delta L_{max}$) est d'autant plus grande que le spectre est étroit :

$$(6.36) \quad L_{coh} \approx \frac{c}{\Delta \nu} \approx \frac{\lambda^2}{\Delta \lambda}.$$

5b-2.5. GÉNÉRATION D'UNE ONDE ÉLECTROMAGNÉTIQUE

La production d'ondes électromagnétiques se fait au moyen d'antennes dont un modèle simplifié consiste en deux tiges métalliques reliées à une source de courant alternatif comme l'a montré Heinrich Herz en 1887 [*Benson-2.09 - p481*].

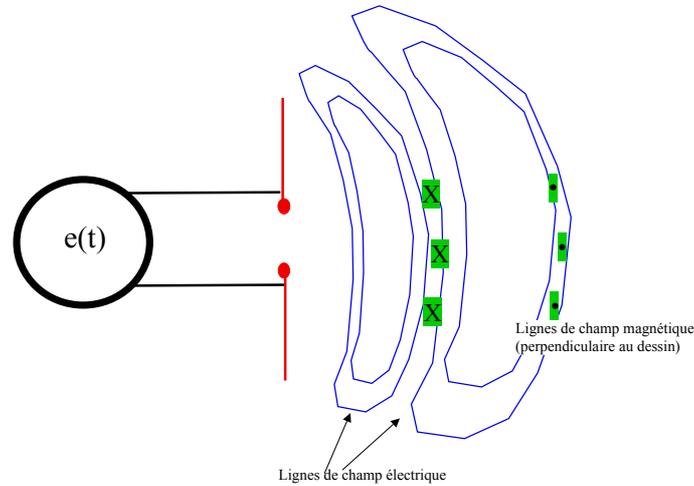


Fig. 6-11 : Antenne électrique et champs associés.

La distribution des champs au voisinage de l'antenne est complexe, mais à grande distance la répartition se simplifie ; en un point donné on retrouve une variation de champ qui reproduit les variations de fém produites par la source alimentant l'antenne en courant. Les dimensions de l'antenne dépendent de la longueur d'onde des ondes à produire, et donc de la fréquence du signal généré par la source.

5b-2.6. PROPRIÉTÉS SPATIALES DE L'ONDE ÉM.

Définition de l'angle solide.

Soit une sphère de centre O, de rayon R et de surface S et un élément dS de surface sur cette sphère (Figure). L'espace limité par le cône porté par dS et centré en O est un angle solide dont la dimension Ω en stéradian (sr) égal à $\frac{dS}{R^2}$. L'angle solide soutenu par toute la sphère est égal à 4π .

Le cône de base circulaire centré sur la direction \vec{u} et issu de O a un demi-angle au sommet θ ; l'angle solide soutenu par le cône est égal à :

$$(6.37) \quad \Omega = 2\pi (1 - \cos \theta).$$

Si θ est petit, on peut utiliser l'approximation :

$$(6.38) \quad \Omega \approx \pi\theta^2$$

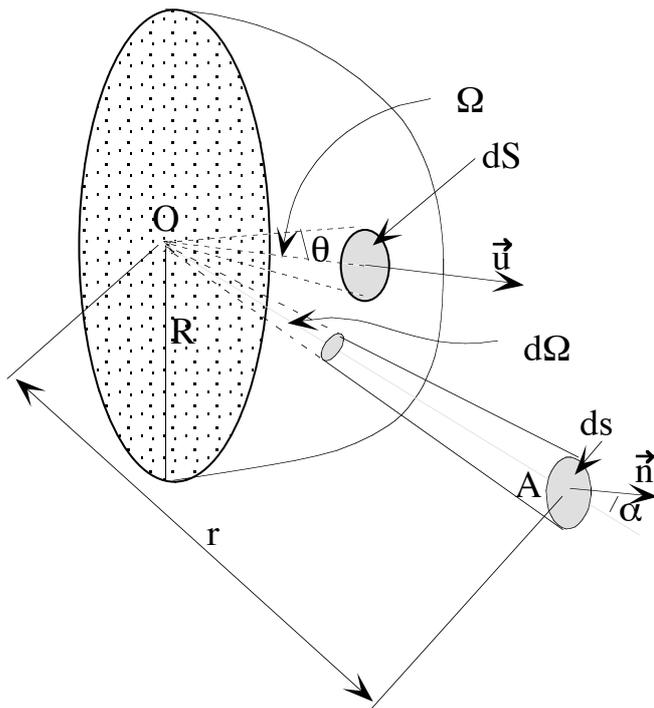


Fig. 6-12 : Angle solide

$$d\Omega \text{ (en stéradians)} = \frac{dS}{R^2}$$

Dans le cas général d'un élément de surface dS autour d'un point A distant de r du point O , l'angle solide correspondant à O et dS est égal à :

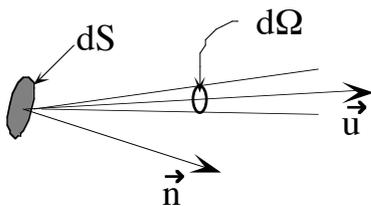
$$d\Omega = \frac{dS}{r^2} \cos \alpha$$

avec $\alpha = (\vec{OA}, \vec{n})$ \vec{n} étant la normale à l'élément de surface dS .

Étendue géométrique d'un faisceau .

L'étendue géométrique d'un faisceau lumineux est définie par la relation suivante :

$$(6.39) \quad d\Gamma \text{ (m}^2 \times \text{sr)} = \vec{u} \cdot \vec{n} \, dS \, d\Omega .$$



Étendue géométrique d'un faisceau.

Le faisceau d'axe \vec{u} est constitué par un ensemble de rayons lumineux s'appuyant sur l'élément de surface dS et contenus dans un angle solide $d\Omega$ autour de \vec{u} . L'étendue du faisceau est conservée au cours de la propagation.

Si on considère un pinceau de rayons allant de la surface d'un émetteur à celle d'un détecteur, l'étendue est égale à :

$$(6.40) \quad d\Gamma = dS \cos \theta \, d\Omega = dS' \cos \theta' \, d\Omega' = \frac{\cos \theta \cos \theta' \, dS \, dS'}{L^2}$$

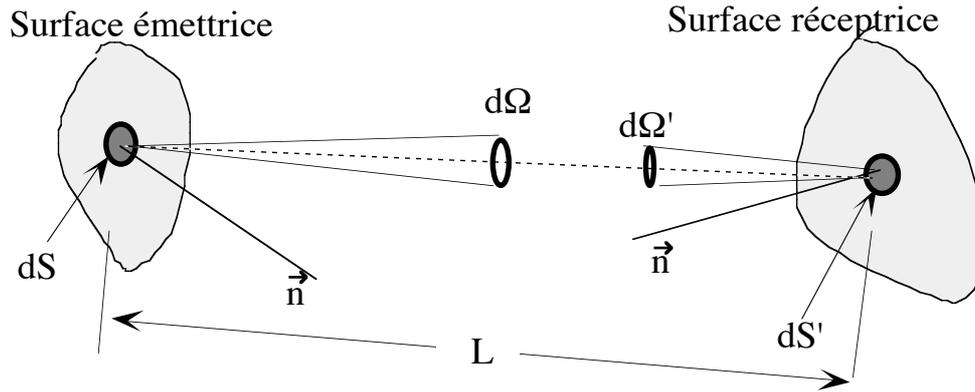
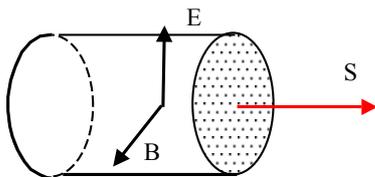


Fig. 6-13 : Étendue géométrique du faisceau issu de l'élément de surface dS et arrivant sur l'élément de surface dS' .

5b-2.7. L'ÉNERGIE TRANSPORTÉ PAR L'ONDE ÉM. GRANDEURS ET UNITÉS.

Énergie transportée par une onde plane.

Les variations temporelles et spatiales des champs électriques et magnétiques dans un volume donné se traduisent par le transport d'énergie et de quantité de mouvement. Considérons une onde é plane (champ électrique \vec{E} et champ magnétique \vec{B}) et un volume unité traversé par cette onde.



Soit u est l'énergie ém dans un volume unité. L'énergie étant conservée, l'équation de continuité suivante s'applique :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \text{div } \vec{S} = 0 .$$

\vec{S} , le vecteur de Poynting représente le flux d'énergie associée à l'onde $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \otimes \vec{B}$. Le

module de \vec{S} [$\frac{\text{Energie}}{\text{Surface } \times \text{ temps}}$] est l'énergie transportée par l'onde par unité de temps à travers

une surface d'aire unité perpendiculaire à la direction de propagation. Dans un milieu isotrope, \vec{S} est parallèle au vecteur d'onde \vec{k} , qui donne la direction de propagation de l'onde.

Le champ électrique de l'onde ém plane (et monochromatique) varie suivant $E = E_0 \cos(\omega t)$. Si on suppose que l'onde se propage dans le vide (caractérisé par la constante de permittivité électrique $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$), l'énergie contenue dans le champ électrique du volume unitaire à un instant t est égale à $\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$. Et celle contenue dans le champ magnétique est $\frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}$. L'énergie ém totale est la

somme des 2 termes, soit $u_{em} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} = \epsilon_0 E^2$ La valeur puisque nous avons $B = \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} E$.

L'onde se propage à la vitesse c , l'énergie transportée par l'onde par unité de temps et à travers une surface unité est égale à $c u_{em} = c \epsilon_0 E^2$.

Aux fréquences optiques, les variations temporelles des champs, et donc de l'énergie transportée ne peuvent pas être détectées directement, la fréquence étant trop élevée ($\nu = c/\lambda \approx 10^{14}$ Hz). Une sensation lumineuse est créée par un signal qui dure au moins 0,1 s et les détecteurs les plus rapides répondent à des signaux de durée supérieure à 10^{-12} s. En pratique, on s'intéresse donc à la valeur moyenne de l'énergie transportée par l'onde. Dans le cas d'une onde plane monochromatique de champ électrique E considérée ici, comme le champ varie en $\cos(\omega t)$, un facteur $\frac{1}{2}$ apparaît dans l'expression du flux exprimée en valeur moyennée :

$$(6.41) \quad [S] = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c E_0^2 .$$

Lorsque l'onde se propage dans un milieu, il y a échange d'énergie entre le milieu et l'onde. Il faut alors tenir compte de :

- l'énergie transportée,
- l'énergie dissipée dans le milieu sur les dipôles électriques et les dipôles magnétiques,
- l'énergie stockée dans le milieu.

Pour mesurer l'énergie associée à une onde ém, on a le choix entre deux familles d'unités:

- des unités basées sur la réponse de l'œil ; cela concerne la lumière visible (on parle alors de photométrie).

- des unités indépendantes de toute sensation visuelle ; ce sont les joules et les watts utilisés dans les autres domaines de la physique et cela concerne tous les types de rayonnement.

Quantité de mouvement et pression de radiation

L'onde ém transportant de l'énergie, on peut lui associer une quantité de mouvement p définie comme :

$$p = \frac{U}{c} , \quad U \text{ étant la densité d'énergie transportée, } c \text{ la célérité de l'onde. Cette quantité de}$$

mouvement est transmise à la cible irradiée par l'onde. La force qui en résulte, bien que faible, peut être mesurée et se manifeste par exemple dans une expérience de 'l'évitation' dans laquelle un faisceau laser peut exercer une pression suffisante sur une fine particule pour lui permettre de rester immobile dans l'espace.

Flux énergétique.

Le flux énergétique (Φ_e en Watts) est la puissance de rayonnement émise par une source, se propageant dans un milieu ou reçue par un détecteur.

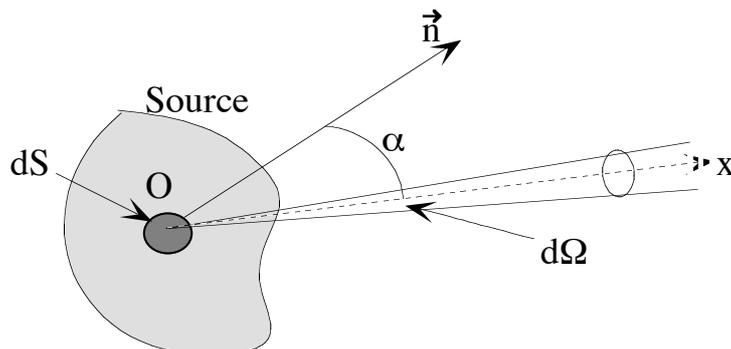


Fig. 6-14 : Source de rayonnement. dS est un élément de surface.

Dans le cas général, la source émet de l'énergie dans tout l'espace. Le flux énergétique correspond à la totalité de l'énergie émise. D'autres grandeurs définies dans le texte sont nécessaires pour définir l'énergie émise par un point de la source dans une direction donnée.

Intensité énergétique

L'intensité énergétique I_e (en watts/stéradian) est définie pour une source de petite dimension. C'est le flux énergétique émis dans un cône élémentaire $d\Omega$ centré sur une direction donnée :

$$(6.42) \quad I_e = \frac{d\Phi_e}{d\Omega} .$$

Luminance énergétique

La luminance L_e (en $W \cdot sr^{-1} \cdot m^{-2}$) est le quotient de l'intensité émise par un élément de surface dans une direction donnée par l'aire de la projection orthogonale de cet élément sur un plan perpendiculaire à cette direction.

La luminance est égale à :

$$(6.43) \quad L_e(\alpha) = \frac{dI_e}{dS \cos \alpha} .$$

Une source obéit à la loi de Lambert si la luminance est indépendante de la direction; une telle source est un diffuseur parfait. L'intensité émise par cette source suit une loi donnée par :

$$(6.44) \quad I(\alpha) = L dS \cos \alpha .$$

La surface indicatrice de I est une sphère tangente à dS .

Dans un milieu homogène ne présentant pas d'absorption ou d'émission, la luminance est conservée. Pour les milieux absorbants, il convient de définir un **facteur de transmission**.

La notion de luminance s'applique uniquement lorsque l'étendue de la source définie comme $n y \sin(u)$ est grande par rapport à la longueur d'onde (n : indice, y étendue transverse de la source, u : étendue angulaire du faisceau émis). Cela signifie qu'il ne faut pas appliquer cette notion à un faisceau laser ou au faisceau sortant d'une fibre optique.

L'émittance (ou exitance) énergétique

M_e (en $W \cdot m^{-2}$) est le flux total rayonné dans tout le demi-espace extérieur par un élément de surface de la source; M_e en un point de la source est égale au quotient du flux énergétique émis par un élément de surface centrée sur le point considéré par l'aire de cet élément :

$$(6.45) \quad M_e = \frac{d\Phi_e}{dS} .$$

La luminance et l'émittance d'une source suivant la loi de Lambert sont telles que :

$$(6.46) \quad M_{e.L} = \pi L_{e.L} .$$

On définit également une quantité de lumière (en joules), comme l'intégrale du flux transporté pendant une durée déterminée :

L'éclairement énergétique

L'éclairement énergétique E_e (en Watts par m^2) caractérise le rayonnement incident sur une surface : c'est le quotient du flux énergétique reçu par un élément dS' de surface par l'aire de cet élément :

$$(6.47) \quad E_e = \frac{d\Phi_e}{dS'}$$

L'exposition d'une surface en un point donné est égale à l'intégrale de l'éclairement pendant une durée déterminée.

Grandeurs énergétiques monochromatiques.

Les grandeurs définies ci-dessus tiennent compte de la totalité de l'énergie du rayonnement indépendamment de la longueur d'onde. Dans beaucoup de cas les phénomènes doivent être décrits pour une bande bien définie du spectre. Les grandeurs seront alors données pour un petit intervalle $[\lambda, \lambda+d\lambda]$ du spectre. Les grandeurs monochromatiques sont notées : $E_{e,\lambda}$, $M_{e,\lambda}$, $L_{e,\lambda}$. Les unités dépendent de l'intervalle $d\lambda$ de longueur choisi.

Grandeurs et unités photoniques.

On peut également utiliser les grandeurs définies ci-dessus en considérant le rayonnement comme un flux de particules, les photons. Le flux photonique sera ainsi défini en nombre de photons transporté par le rayonnement. Rappelons qu'un photon transporte une quantité d'énergie donnée par la relation $U = h\nu$, h étant la constante de Planck.

Photométrie visuelle.

Les grandeurs sont les mêmes que ci-dessus mais les unités sont définies par rapport à la sensibilité de l'œil.

Flux lumineux en lumens

Le **flux lumineux** est une grandeur caractéristique d'un rayonnement exprimant son aptitude à produire une sensation lumineuse. L'unité de flux lumineux est le **lumen** (lm).

*Un **lumen** est la quantité de flux lumineux transporté par un rayonnement émis dans un angle d'espace de 1 stéradian par une source ponctuelle uniforme et ayant une intensité de 1 Candela (la candela est définie plus loin).*

L'action d'un rayonnement sur l'œil dépend de sa composition spectrale. Il est évident qu'un rayonnement infrarouge (longueur d'onde supérieure à $0,8 \mu\text{m}$) ou ultraviolet (longueur d'onde inférieure à $0,4 \mu\text{m}$) ne cause pas de sensation lumineuse mais transporte néanmoins de l'énergie.

La conversion d'un flux énergétique (Φ_I) en flux lumineux (Φ_e) se fait par la relation $\Phi_e = V(\lambda)\Phi_I$ où $V(\lambda)$ est un coefficient qui tient compte de la sensibilité de l'œil aux différentes longueurs d'onde; $V(\lambda)$ caractérise l'aptitude du rayonnement à produire une sensation lumineuse et est appelée l'efficacité lumineuse du rayonnement. Au maximum de sensibilité de l'œil ($\lambda = 555 \text{ nm}$), on a $V \approx 680$. Il existe d'ailleurs deux courbes $V(\lambda)$, une pour la vision en lumière intense et une autre en lumière faible, le mécanisme de détection par l'œil n'étant pas le même dans les deux cas.

Pour un rayonnement dont le spectre couvre tout le visible, on peut retenir l'ordre de grandeur suivant Flux de 1 lm \approx Puissance de 1,5 mW .

Efficacité lumineuse d'une source

Les sources lumineuses utilisées pour l'éclairage ne transforment qu'une partie de l'énergie électrique qu'elle consomment en énergie lumineuse. On les caractérise donc par leur **efficacité** ρ défini comme

$$(6.48) \quad \rho \text{ (en lm/W)} = \frac{\text{Flux lumineux émis}}{\text{Puiss électrique consommée}}$$

Lampe à incandescence	lampe à halogène	lampe à décharge de 0,1 à 1 kW	lampes fluorescentes	lampe à vapeur de sodium
-----------------------	------------------	--------------------------------	----------------------	--------------------------

10 à 20 lm/W	25 lm/W	30 à 50 lm/W	50 lm/W	60 à 80 lm/W
--------------	---------	--------------	---------	--------------

Quelques valeurs d'efficacité lumineuse.

Intensité lumineuse rayonnée par une source dans une direction donnée

L'intensité lumineuse I (en candelas) dans une direction donnée d'une source, est définie par la relation suivante :

$$(6.49) \quad I = \frac{dF_1}{d\Omega}.$$

dF_1 est le flux lumineux émis par la source dans l'angle d'espace élémentaire $d\Omega$ centré sur la direction considérée. Le flux lumineux émis par une source est donc obtenu en intégrant l'intensité sur tout l'espace dans lequel la source rayonne; pour une source ponctuelle dont l'intensité I ne dépend pas de la direction considérée, le flux est donné par la relation :

$$(6.50) \quad F_1 = 4 \pi I.$$

L'unité d'intensité lumineuse est la **candela** (Cd), unité de base des grandeurs visuelles, définie en référence à une source particulière, comme l'indique la définition ci-après.

*La **candela** est l'intensité lumineuse rayonnée dans une direction donnée d'une source qui émet un rayonnement monochromatique de fréquence 540×10^{12} Hz et dont l'intensité énergétique dans cette direction est de 1/683 watts par stéradian.*

Les sources lumineuses fournissent en général une intensité lumineuse I qui dépend de la direction considérée; les sources sont donc caractérisées par leur **diagramme d'émission** qui donne l'intensité lumineuse émise en fonction de la direction. Une ampoule électrique ordinaire fournit un rayonnement qui dépend assez peu de la direction pour une grande partie de l'espace qui l'entoure; une ampoule de 60 Watts alimentée sous sa tension nominale, rayonne une intensité lumineuse voisine de 75 Cd.

Luminance

La luminance s'exprime en nits. 1 nit = 1 cd / m² On utilise aussi le Lambert égal à 1 lm/cm².

Emittance et éclairement

L'unité d'émission et d'éclairement est le lux : 1 lux = 1 lm/m².

Éclairement d'une surface

L'éclairement sur un élément d'une surface est définie comme le quotient entre le flux lumineux reçu par la surface et l'aire dS de l'élément de surface :

$$(6.51) \quad E = \frac{dF_1}{dS}.$$

L'éclairement est mesuré en **lux** (lx).

Le **lux** est défini comme l'éclairement d'une surface de 1 m² recevant uniformément un flux de 1 lm.

Lorsqu'un rayonnement d'intensité I arrive sur une surface sous une incidence normale, l'éclairement est donné par la relation :

$$(6.52) \quad E = \frac{I}{d^2} \text{ où } d \text{ est la distance source-détecteur.}$$

Pour obtenir l'intensité lumineuse d'une source, il suffit donc relever l'éclairement reçu de cette source par un photodétecteur en fonction de la distance d entre le détecteur et la source; la pente de la partie linéaire de la courbe $E = f(d^{-2})$ donne l'intensité. La mesure des éclairagements est faite à l'aide d'un **luxmètre** qui est constitué d'une photopile reliée à un milliampèremètre directement gradué en lux.

Quelques éclairagements typiques d'éclairement en lux :

pleine lune au zénith	juste suffisant pour se diriger	dans un bureau en plein jour	en plein air, de jour, sans soleil	en plein soleil estival
0,2	1	100	1000	100 000

5b-2.8. NOTIONS DE POLARISATION

Les différents états de polarisation d'un rayonnement ém.

La polarisation d'un rayonnement ém est liée à l'orientation du champ électrique qui lui est associé. Cette orientation peut varier dans l'espace et dans le temps de façon aléatoire; on parle alors de rayonnement non polarisé. Très souvent dans la pratique, les projections du champ électrique suivant deux axes donnés varient de façon prévisible; le rayonnement présente alors une polarisation elliptique dont deux cas particuliers sont la polarisation linéaire et la polarisation circulaire.

Polarisation aléatoire (ou lumière non polarisée)

Les sources thermiques émettent un rayonnement dont le champ électrique n'a pas d'orientation privilégiée. Cet état peut cependant être modifié au passage à travers une interface ou par propagation à travers un matériau diffusant ou à réfringence anisotrope.

Polarisation elliptique.

On parle de polarisation elliptique lorsque l'extrémité du champ électrique, projeté sur un plan perpendiculaire à la direction de propagation, décrit une ellipse (Fig. ci-après). Cette situation est observée lorsque les deux composantes du champ sur deux axes transverses vibrent avec un décalage de phase différent de 0 et de $\pi/2$.

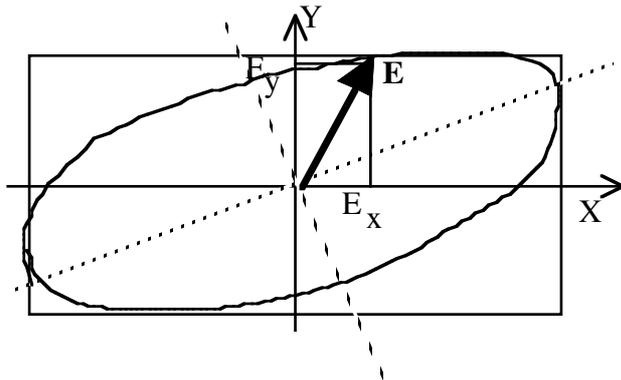


Fig. 6-15 : Polarisation elliptique, le cas le plus fréquent.

L'extrémité du champ électrique en projection décrit une ellipse. Les deux composantes du champ électrique E sur les axes X et Y ont des amplitudes différentes et vibrent avec un décalage de phase compris entre 0 et $\pi/2$, mais différent de ces deux valeurs. Les polarisations linéaires et circulaires sont des cas particuliers de la polarisation elliptique.

Polarisation circulaire.

Lorsque les deux composantes du champ électrique mentionnées ci-dessus ont la même amplitude et sont déphasées de $\pi/2$, l'extrémité du champ en projection décrit un cercle; le rayonnement présente alors une polarisation circulaire.

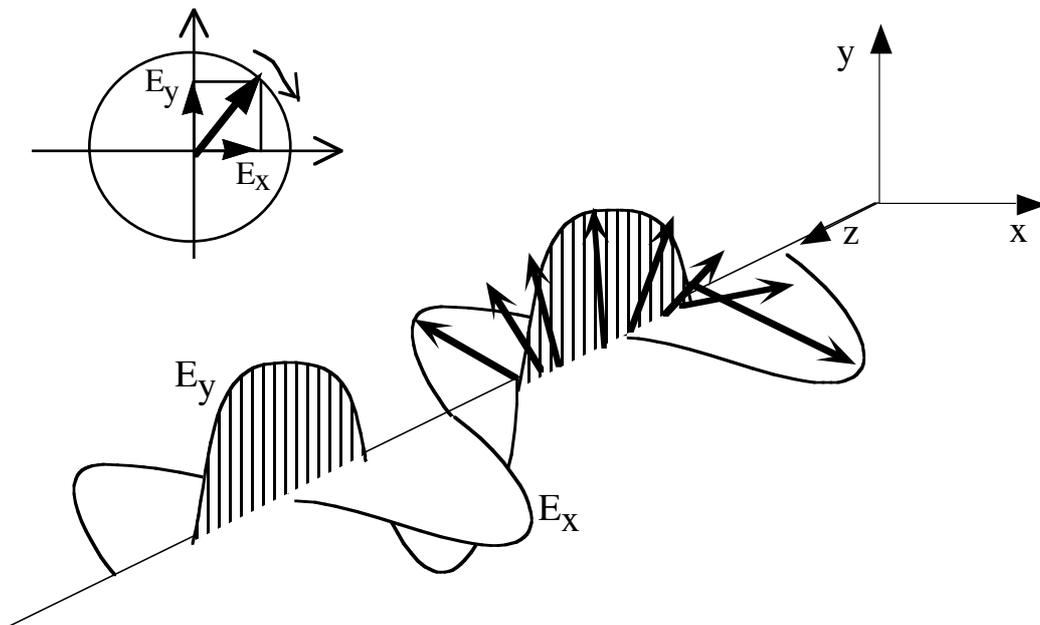


Fig. 6-16 : Polarisation circulaire droite.

L'extrémité du champ électrique décrit une hélice, qui projetée sur un plan perpendiculaire à la direction de propagation donne un cercle, d'où le nom de cet état de polarisation. Une onde de polarisation circulaire peut être décrite comme la superposition de deux ondes de même amplitude, à polarisation rectiligne et décalées de 90° .

Polarisation linéaire.

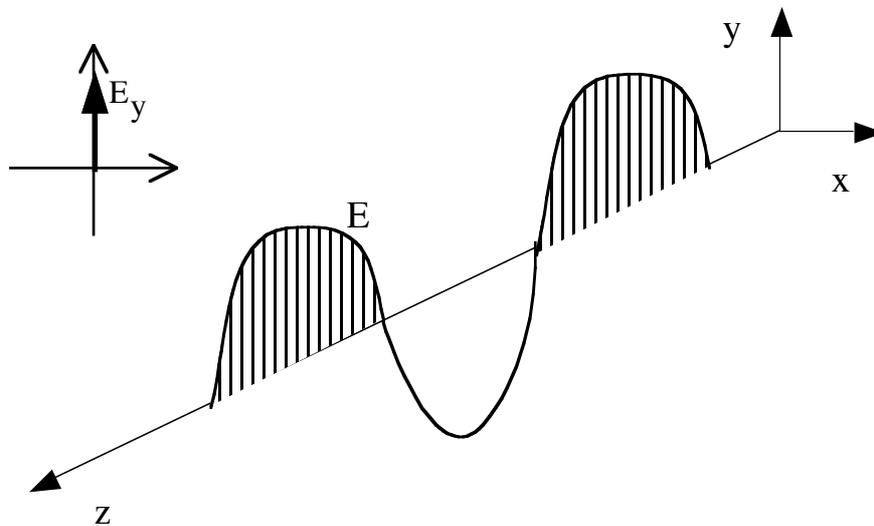


Fig. 6-17 : Polarisation rectiligne.

Le champ électrique E reste parallèle à une direction fixe (ici l'axe Y) au cours de la propagation de rayonnement.

Modification de l'état de polarisation

Polarisation par absorption

Certains matériaux transparents présentent la propriété d'atténuer fortement le champ électrique d'un rayonnement orienté suivant une direction particulière. Il en résulte qu'à la sortie d'un tel matériau, un rayonnement non polarisé à l'entrée a pris une polarisation rectiligne. Les feuilles 'Polaroid' fonctionnent suivant ce principe.

Polarisation par réflexion

Dans un système optique où les incidences sont perpendiculaires aux surfaces, les effets de polarisation sont négligeables, voire inexistant. Lorsque les angles d'incidence sont importants, les effets de la réflexion sur l'état de polarisation du rayonnement ne peuvent plus être négligés. Nous avons rappelé précédemment que le coefficient de réflexion d'une surface dépend de l'orientation du champ électrique de l'onde. C'est seulement dans des conditions très particulières, qu'aucune altération de l'état de polarisation d'une onde n'est observée lors d'une réflexion ou à la traversée d'un dioptre.

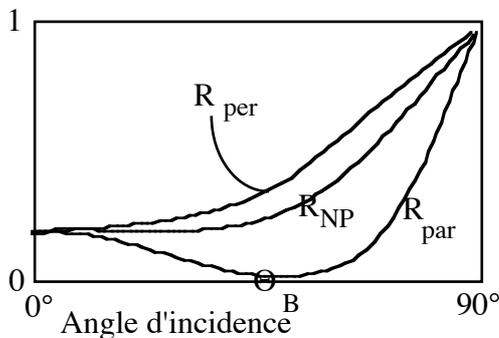


Fig. 6-18 : Polarisation par réflexion.

Coefficient de réflexion à l'interface entre deux diélectriques pour une onde polarisée perpendiculairement au plan d'incidence (R_{per}), pour une onde polarisée dans le plan d'incidence (R_{par}) et pour une onde à polarisation aléatoire ou non polarisée (R_{NP}). A l'angle de Brewster θ_B , l'onde réfléchie a une polarisation rectiligne, car le pouvoir réfléchissant de l'interface pour l'une des deux composantes du champ est nulle.

Polarisation par réfraction. Lames à retard.

Il existe des matériaux pour lesquels l'indice de réfraction dépend de l'orientation du champ électrique (matériaux biréfringents). L'utilisation de ces matériaux permet de réaliser des polariseurs comme le prisme de Nicol (figure ci-dessous).

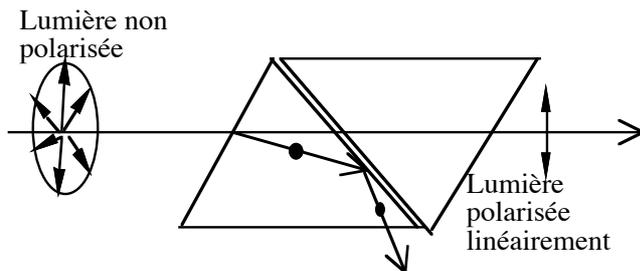


Fig. 6-19 : Prisme de Nicol.

A l'intérieur du prisme en calcite, l'onde incidente se décompose en deux ondes polarisées S et P. L'onde S subit une réflexion totale interne à l'interface entre les deux parties du prisme. L'onde P est transmise.

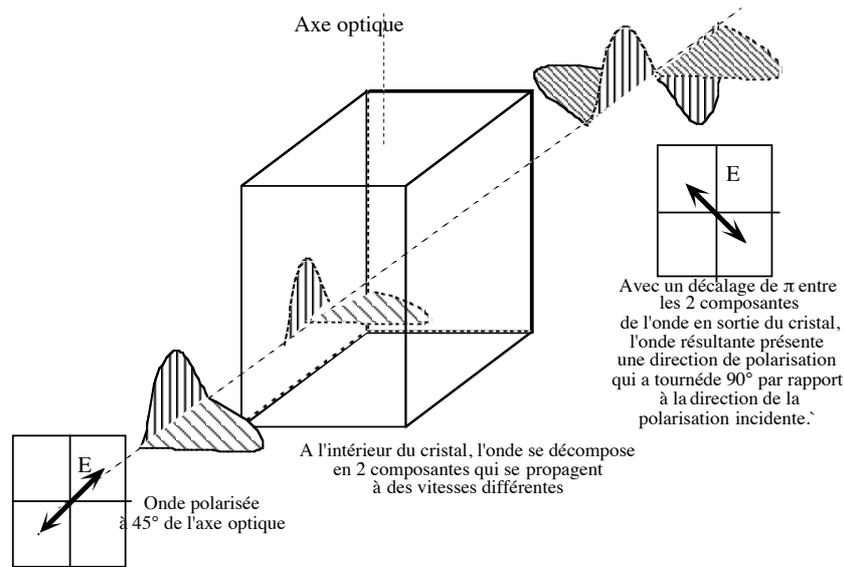


Fig. 6-20 : Modification de l'état de polarisation d'une onde par une lame demi-onde.

La lame demi-onde est constituée d'un cristal présentant une direction particulière appelée axe optique. Dans ce matériau biréfringent, une onde optique polarisée suivant l'axe optique, ou onde 'extraordinaire' se propage à une vitesse différente de celle d'une onde polarisée suivant les autres directions, ou onde 'ordinaire'. Dans la lame demi-onde il y a décomposition de l'onde en une onde 'e' et une onde 'o' (ordinaire). Par un choix approprié de l'épaisseur de la lame, il est possible de décaler les deux ondes de 180° . Leur recombinaison à la sortie de la lame donne naissance à une onde de polarisation rectiligne, avec un champ électrique perpendiculaire à la direction du champ à l'entrée.

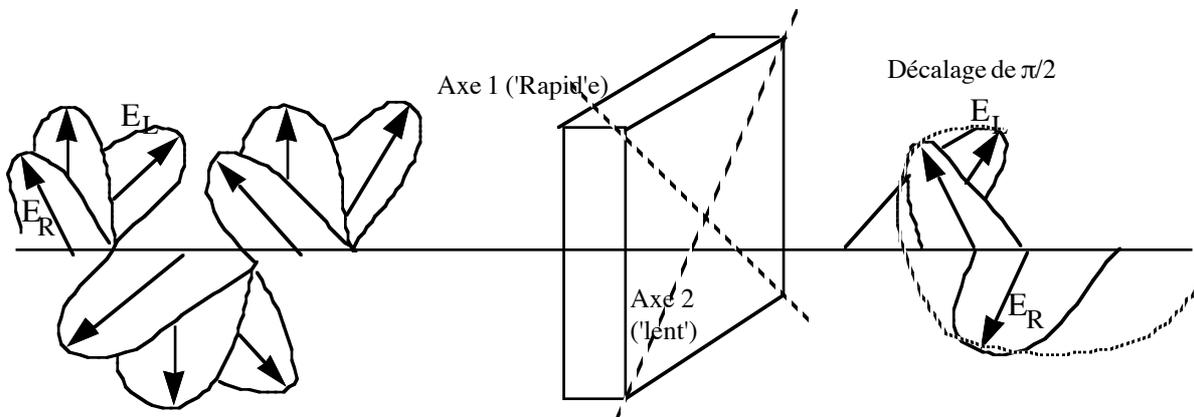


Fig. 6-21 : Modification de l'état de polarisation d'une onde par une lame quart-d'onde.

La lame quart d'onde est un matériau biréfringent caractérisé par un axe 'rapide' et un axe 'lent'. L'onde incidente, de polarisation rectiligne, peut être considérée comme la superposition de deux ondes polarisées suivant les deux axes du cristal. Ces deux ondes apparaissent effectivement à l'intérieur du cristal et se propagent à des vitesses différentes. La lame quart-d'onde a une épaisseur choisie pour qu'à une longueur d'onde donnée, les deux composantes du champ soient décalées de $\pi/2$ en sortie. Le résultat de la superposition de ces deux ondes déphasées est une onde polarisée circulairement.

Quand faut-il tenir compte de la polarisation ?

Les effets liés à la polarisation de la lumière sont très fréquents. On les met en œuvre dans certains dispositifs comme les modulateurs de lumière. Il faut également en tenir compte dans les applications courantes.

Photographie. Tous les photographes connaissent l'utilité d'un filtre dit 'polarisant' dont le rôle est d'éliminer certaines réflexions; en effet la lumière naturelle ou artificielle non polarisée, réfléchiée par

une surface vitreuse prend une polarisation rectiligne si l'incidence est proche de l'incidence de Brewster.

Interférométrie. Les franges claires et obscures observées dans un interféromètre sont le résultat de l'addition vectorielle de deux ou plusieurs ondes. Le contraste des franges est maximum lorsque les champs électriques des différentes ondes sont parallèles, ce qui signifie que ces ondes ont une polarisation rectiligne.

Fenêtre de Brewster dans les lasers. La polarisation linéaire est l'état de polarisation le plus facile à maîtriser; il est donc souhaitable pour beaucoup d'applications de disposer d'un faisceau à polarisation rectiligne. Dans un laser la polarisation linéaire est obtenue par l'introduction dans la cavité de surfaces à l'angle de polarisation, dites 'fenêtres de Brewster'.

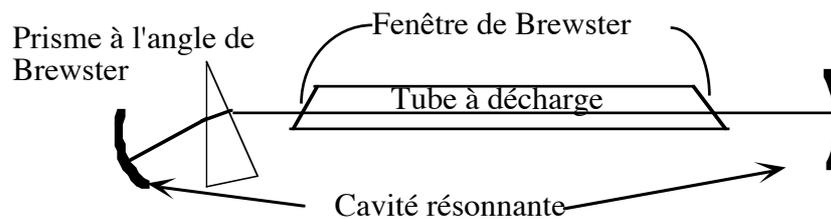


Fig. 6-22 : Polarisation de l'onde dans une cavité résonnante.

Le rayonnement émis par le gaz contenu dans le tube à décharge passe à travers des fenêtres orientées à l'angle de Brewster. La traversée du prisme se fait également à l'angle de Brewster. La composante 'S' de l'onde est atténuée au passage à travers ces composants alors que la composante 'P' passe sans subir d'atténuation. L'onde qui résulte d'un grand nombre d'aller-retours à l'intérieur d'une telle cavité présentera donc une polarisation rectiligne avec un champ électrique vertical (parallèle au plan du dessin).

Usinage par faisceau laser

Les utilisateurs de lasers industriels de grande puissance ont parfois la surprise de constater que l'aspect de la découpe d'une tôle par un faisceau laser dépend de la direction de déplacement du faisceau par rapport à la pièce. Cet inconvénient peut être éliminé par un contrôle précis de l'état de polarisation du faisceau, une polarisation circulaire donnant en général un résultat plus régulier, indépendant de la direction.

5b-2.9. QUELQUES OUVRAGES DE RÉFÉRENCES SUR LES ONDES ÉM

[Benson-2.09] - Physique. Électricité et Magnétisme. Ch. 13 - Haris Benson, De Boeck, 4ème ef., 2009, ISBN 978-2-8041-0761-1.

[Benson-3.09] - Physique. Ondes, optique et physique moderne. Haris Benson, De Boeck, 2009, ISBN 978-2-8041-0763-5

- [Petit.89] - "Ondes électromagnétiques en radioélectricité et en optique" - R. Petit, Masson, 1989.
- [Vassalo.80] - "Électromagnétisme classique dans la matière", C. Vassalo, Dunod, Paris (1980)
- [Born et Wolf.75] - « Principle of Optics », Born and Wolf, 5th ed, Pergamon Press (1975)
- [Perez.04] - "Optique : Fondements et applications" Avec 250 exercices et problèmes résolus, José-Philippe Pérez, Dunod, 2004 - 7ème édition - 736 pages - 175x240 mm, EAN13 : 9782100484973
- Électromagnétisme. Fondements et applications. J. Ph. Pérez, R. Carles, R. Fleckinger, Dunod, 4è ed., 2009

