

3. VIBRATIONS des SYSTÈMES CONTINUS.

3.1. VIBRATIONS DES SYSTÈMES CONTINUS. PASSAGE DU DISCRET AU CONTINU

3.1.1. VIBRATIONS LONGITUDINALES D'UNE CHAÎNE D'OSCILLATEURS DE LONGUEUR INFINIE. RELATION DE DISPERSION.

Fréquences propres - Modes propres¹ -

Considérons une chaîne de n oscillateurs mécaniques élémentaires (fig. ci-après). On suppose que les frottements peuvent être négligés.

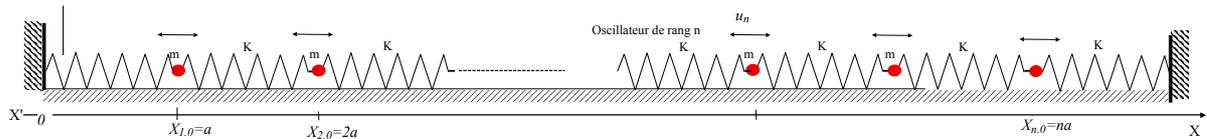


Fig. 4-1 : Chaîne d'oscillateurs identiques. L'état de l'oscillateur de rang n est repéré par son écart un par rapport à sa position d'équilibre x_{n0} . La chaîne présente une période spatiale a correspondant à la longueur d'un oscillateur. Les extrémités ($X = 0$ et $X = (N+1)a$) sont fixés et donc immobiles.

Un oscillateur ayant une longueur a , l'oscillateur de rang n se trouve à l'abscisse $X_{n0} = na$. La longueur totale de la chaîne est $L = [(N + 1)] a$.

Le mouvement d'un oscillateur quelconque dépend des mouvements de ses voisins. Soit $u_n(t)$ l'écart par rapport à sa situation d'équilibre de l'oscillateur de rang n. Le mouvement de l'oscillateur répond à l'équation différentielle suivante :

$$m \frac{d^2 u_n}{dt^2} = -K(u_n - u_{n-1}) - K(u_n - u_{n+1})$$

Si on écrit l'ensemble des équations différentielles du mouvement cela donne :

- pour l'oscillateur 1 : $m \frac{d^2 u_1}{dt^2} = -Ku_1 - K(u_1 - u_2)$
- pour l'oscillateur 2 : $m \frac{d^2 u_2}{dt^2} = -K(u_2 - u_1) - K(u_2 - u_3)$
- pour l'oscillateur N : $m \frac{d^2 u_N}{dt^2} = -K(u_N - u_{N-1}) - Ku_N$

En généralisant le principe adopté pour les systèmes à 2 degrés de liberté, il convient de chercher des solutions de la forme $\overline{u_n(t)} = \overline{A_n} e^{\pm i\omega t}$

En remplaçant dans les équations du mouvement on obtient un système d'équations algébriques.

$$A_1 \left(-\omega^2 + 2 \frac{K}{m} \right) = \frac{K}{m} A_2$$

¹ Vibrations – ondes – Janine Bruneaux – Jean Matricon – Ellipses, 2008 – ch3 – p62

$$A_n \left(-\omega^2 + 2 \frac{K}{m} \right) = \frac{K}{m} (A_{n+1} + A_{n-1})$$

$$A_N \left(-\omega^2 + 2 \frac{K}{m} \right) = \frac{K}{m} A_{N-1}$$

$\frac{K}{m} = \omega_0^2$ En posant et en combinant toutes les équations différentielles, on obtient un système de N équations à N inconnues.

$$\begin{vmatrix} \left(2 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right) & & & & -1 \\ & -1 & & & \\ & & \left(2 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right) & & -1 \\ & & & \ddots & \\ & & & & -1 & \left(2 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right) \end{vmatrix} = 0$$

Cette équation a des solutions non triviales si le déterminant est nul. Les « zéros » du déterminant sont les pulsations propres du système considéré. Il y a N racines, donc N fréquences propres. A chaque fréquence correspond un mode propre dont il est possible de trouver la répartition des amplitudes d'oscillation le long de la chaîne. Ces amplitudes sont réelles, ce qui signifie que pour chaque solution (ou mode propre) deux oscillateurs quelconques oscillent en phase, ou en opposition de phase.

Calcul des fréquences propres.

Les équations algébriques obtenues ci-dessus suggèrent la forme de réponse suivante pour les solutions (une série géométrique) : $A_n = A p^n$ et $u_n(t) = A_n e^{\pm i\omega t}$

Il faut à ce niveau tenir compte des conditions choisies au limites, à savoir des points immobiles.

$$A_n = A \sin(nak)$$

Une fonction sinus convient. Essayons donc $A_n = A \sin(nak)$, a étant la constante de périodicité spatiale, et k un paramètre qu'on introduit. Comme na correspond à une longueur et nak à la phase de la fonction, k correspond à une variation de cette phase par unité de longueur.

On reporte cette solution dans l'équation de rang n :

$$A_n \left(-\omega^2 + 2 \frac{K}{m} \right) = \frac{K}{m} (A_{n+1} + A_{n-1}) \quad \text{ou} \quad A_n \left(-\frac{\omega^2}{\omega_0^2} + 2 \right) = A_{n+1} + A_{n-1}$$

soit :

$$A \sin(nak) \left(2 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right) = A \sin((n+1)ak) + A \sin((n-1)ak) \quad \text{ou}$$

$$A \sin(nka) \left(2 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right) = 2A \sin(nka) \cos(ka)$$

$$\sin(x) + \sin(y) = 2 \cdot \cos\left[\frac{1}{2}(x-y)\right] \cdot \sin\left[\frac{1}{2}(x+y)\right]$$

(en utilisant la relation

Ce qui impose : $\left(2 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) = 2 \cos(ka)$ ou $\frac{\omega^2}{\omega_0^2} = 2[1 - \cos(ka)] = 4 \sin^2\left(\frac{ka}{2}\right)$

D'où les solutions : $\omega = 2 \omega_0 \sin\left(\frac{ka}{2}\right)$

Revenons aux conditions aux limites :

Pour l'extrémité de gauche ($x=0$) on a $A_0 = 0$

Pour l'extrémité de droite ($x = (N+1)a$), on a (en écrivant $A_{N+1} = 0$) :

$$A_{N+1} = A \sin((N+1)ak) = A \sin(kL) = 0$$

On en déduit des valeurs pour le paramètre k qu'on a introduit :

$$kL = p\pi \quad \text{ou} \quad k = \frac{p\pi}{L} \quad \text{ou} \quad k = \frac{p\pi}{(N+1)a}$$

D'un point de vue mathématique, p peut être quelconque. D'un point de vue pratique, il convient de ne garder que les N premières valeurs de p , les autres correspondant aux mêmes solutions.

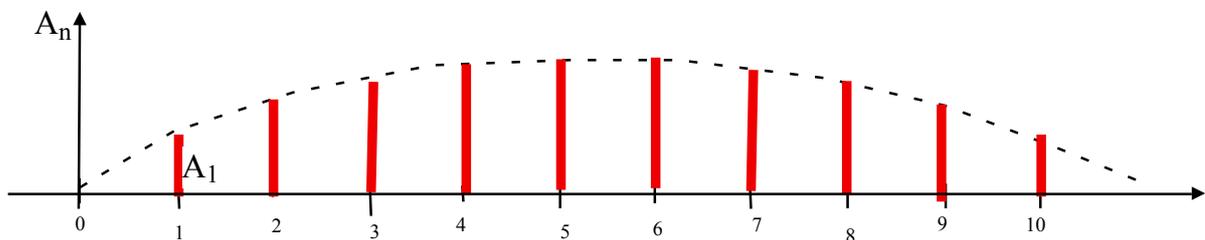
Les différentes solutions en fonction de la valeur de p :

- Pour la valeur de $p = 1$, la pulsation est égale à

$$\omega = 2 \omega_0 \sin\left(\frac{\pi}{2(N+1)}\right) \quad \text{et} \quad k = \frac{\pi}{2(N+1)a}$$

Ce résultat nous permet de calculer les amplitudes A_n correspondant à cette première valeur de la pulsation (pulsation propre fondamentale de la chaîne). On fait varier n de 1 à N et on obtient ces amplitudes, le terme de phase nka variant de 0 à une valeur proche de $\pi/2$. L'amplitude est maximale pour $n=N/2$ et tous les signes sont positifs (oscillation en phase).

La représentation graphique ci-après obtenue pour $N = 10$ permet de mieux visualiser le résultat.

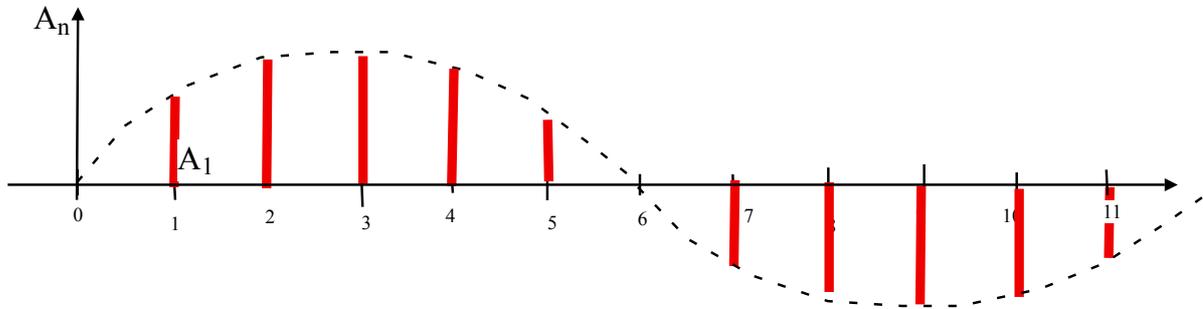


Cette répartition des amplitudes obtenue pour $p = 1$ correspond à une configuration de vibration appelée mode fondamental.

- Pour la valeur de $p = 2$, la pulsation est égale à

$$k = \frac{2\pi}{2(N+1)a} \quad \text{et} \quad \omega = 2 \omega_0 \sin\left(\frac{\pi}{(N+1)}\right)$$

On obtient une nouvelle configuration correspondant au premier harmonique (ou mode propre d'ordre 1). En prenant un nombre impair pour N, on a un oscillateur au milieu de la chaîne dont l'amplitude de vibration est nulle (nœud de vibration). Les amplitudes des différents oscillateurs sont obtenues par l'expression : $A_n = A \sin\left(\frac{2\pi n}{(N+1)}\right)$. La représentation graphique de la répartition des amplitudes pour N=11 est donnée ci-après.



Répartition des amplitudes pour le 1^{er} mode (ou 1^{er} harmonique).

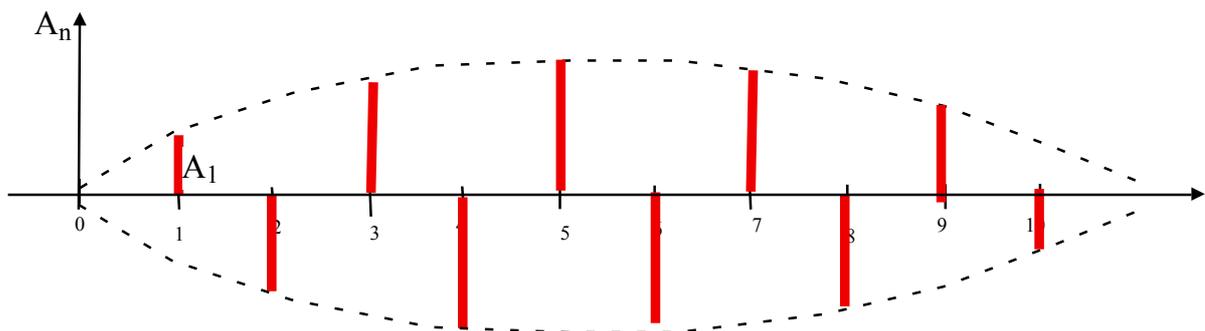
On peut continuer ainsi jusqu'au mode d'ordre N obtenu pour p=N. Les amplitudes sont égales à :

$$A_n = A \sin\left(\frac{N\pi n}{(N+1)}\right) = A \sin\left[n\pi\left(1 - \frac{1}{N+1}\right)\right]$$

ou
$$A_n = A \left[\sin(n\pi) \cos\left(\frac{\pi n}{N+1}\right) - \cos(n\pi) \sin\left(\frac{\pi n}{N+1}\right) \right]$$

ou encore :
$$A_n = A(-1)^n \sin\left(\frac{\pi n}{N+1}\right)$$

Ce sont les mêmes amplitudes que pour le cas p=1, mais ici deux oscillateurs voisins oscillent en opposition de phase. La représentation graphique pour n=10 est montrée ci-après.



Répartition des amplitudes pour le mode le plus élevé (n=N), pour le cas N=10.

Régime forcé

On impose un mouvement $u_1(t) = A \cos(\omega t)$ à la première masse. On s'attend à ce que les oscillateurs voisins reproduisent le mouvement de la première masse avec un certain retard. En régime permanent, tous les oscillateurs devraient osciller à la même pulsation ω . La question qu'on peut se poser est la suivante : est-ce que mouvement pourra se propager le long de la chaîne quelle que soit la pulsation imposée ?

Pour répondre à la question, écrivons le bilan des forces pour la masse de rang n.

$$m \frac{d^2 u_n}{dt^2} = -K(u_n - u_{n-1}) - K(u_n - u_{n+1}) \text{ ou}$$

$$\frac{d^2 u_n}{dt^2} + \omega_0^2 (2u_n - u_{n-1} - u_{n+1}) = 0$$

en introduisant $\omega_0 = \sqrt{K/m}$ (la pulsation propre d'un oscillateur isolé).

Avec cette équation différentielle, apparaît la notion de propagation : le mouvement du premier oscillateur se propage le long de la chaîne. Les oscillateurs reproduiront tous le mouvement du premier, mais avec un retard de phase qui dépend de la position. Soit Φ le déphasage du mouvement entre l'oscillateur n et le suivant : $\Phi = \Phi_{n+1} - \Phi_n$.

On cherche une solution de la forme $u_n(t) = A \cos(\omega t - n \Phi)$, soit sous la forme complexe : $u_n(t) = A e^{-jn \Phi} e^{j\omega t}$.

Après introduction dans l'équation différentielle, on obtient :

$$-\omega^2 A e^{-jn\Phi} + \omega_0^2 \left[2A e^{-jn\Phi} - A e^{-j(n-1)\Phi} - A e^{-j(n+1)\Phi} \right] = 0$$

$$\text{ou } -\omega^2 + \omega_0^2 \left[2 - e^{+j\Phi} - e^{-j\Phi} \right] = 0$$

Ou encore : $-\omega^2 + \omega_0^2 \left[4 \sin^2 \frac{\Phi}{2} \right] = 0$, ce qui nous donne une expression pour ω :

$$\omega^2 = 4 \omega_0^2 \sin^2 \frac{\Phi}{2} \text{ ou } \omega = 2 \omega_0 \left| \sin \frac{\Phi}{2} \right|.$$

En considérant que le premier oscillateur est au rang 0, l'oscillateur de rang n est à l'abscisse $x_n = n.a$ et le déphasage du mouvement de l'oscillateur n est $\Phi_n = n \Phi$. On a donc

$\Phi_n = \frac{\Phi}{a} x_n = k x_n$ en posant $k = \frac{\Phi}{a}$. k correspond donc à un déphasage par unité de longueur (à ne pas confondre avec K, la raideur d'un ressort).

La solution s'écrit alors : $u_n(t) = A \cos(\omega t - k x_n)$ et la relation ci-dessus devient :

$$\boxed{\omega(k) = 2 \omega_0 \left| \sin \frac{ka}{2} \right|}$$

Cette relation entre la pulsation ω et le paramètre k est dite de dispersion.

Comme nous avons $\left| \sin \frac{ka}{2} \right| \leq 1$, cela signifie que les pulsations qui donnent lieu à un phénomène de vibration tout le long de la structure sont telles que $\omega \leq 2\omega_0$. Cette valeur constitue une pulsation limite (ou de **pulsation de coupure**). Nous avons trouvé que, pour le système considéré, il existe des

solutions sinusoïdales pour la répartition spatiale des amplitudes d'oscillation (fig. ci-après) à condition que la pulsation de l'excitation vérifie la relation $\omega \leq 2\omega_0 = 2\sqrt{K/m}$.

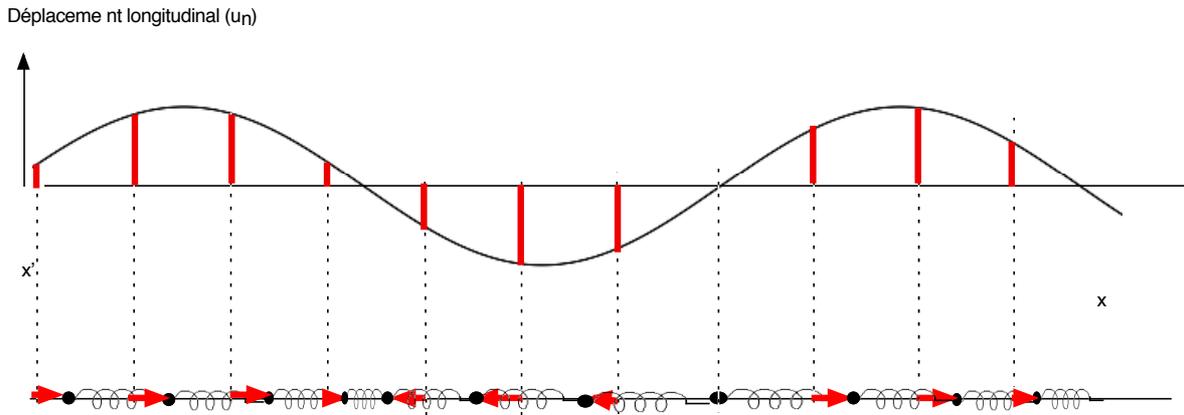


Fig. 4-2 : Répartition des déplacements des oscillateurs le long de la chaîne à un instant donné.

3.1.2. OSCILLATIONS TRANSVERSES D'UN SYSTÈME DE N MASSES PONCTUELLES RELIÉS PAR DES CORDES ÉLASTIQUES. MODES NORMAUX.

3.1.2.1. Condition sur la pulsation d'excitation

Considérons un alignement de masses m reliées à équidistances l par des cordes élastiques identiques [French.71]. Les deux cordes d'extrémités sont attachées à un support rigide fixe. Considérons les déplacements transversaux des masses d'amplitude suffisamment petite pour que la tension initiale T des cordes ne soit pas modifiée de façon significative.



Fig. 4-3 : Système de N masses reliées par une corde élastique. On considère les oscillations transversales. Les 2 masses d'extrémités sont fixes.

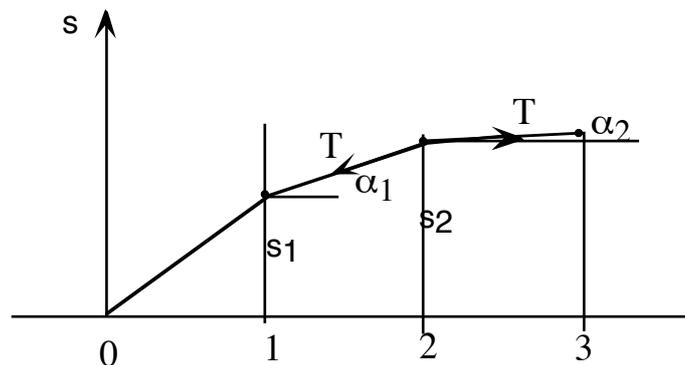


Fig. 4-4 : Forces appliquées à une masse du système pour un petit déplacement transverse. Soit s_n l'écart transversal de la masse de rang n par rapport à sa position d'équilibre.

Supposons que la masse 1 est déplacée de s_1 et que la masse 2 est déplacée de s_2 .

La longueur de la corde entre la masse 1 et 2 devient $l' = \frac{l}{\cos \alpha_1}$. Pour des petites valeurs de $\alpha \ll$

1 rad), on a $\cos \alpha_1 \approx 1 - \frac{(\alpha_1)^2}{2}$ et $l' \approx l \left(1 + \frac{(\alpha_1)^2}{2} \right)$. L'allongement et l'augmentation de tension peuvent être négligés par rapport à tout terme en α_1 .

Dans le cas où les déplacements considérés sont petits par rapport à l , la composante résultante de la force suivant Oy s'appliquant à la masse notée p est :

$$F_p = -T \sin \alpha_{p-1} + T \sin \alpha_p,$$

soit en tenant compte de l'approximation $\sin \alpha_{p-1} = \frac{s_p - s_{p-1}}{l}$, on obtient pour la force s'exerçant

$$\text{sur la masse } m_p : F_p = -\frac{T}{l} (s_p - s_{p-1}) + \frac{T}{l} (s_{p+1} - s_p)$$

Il en résulte l'équation de mouvement suivante :

$$(4.1) \quad \frac{d^2 s_p}{dt^2} + 2\omega_0^2 s_p - \omega_0^2 (s_{p+1} + s_{p-1}) = -\frac{T}{l} (s_p - s_{p-1}) = 0 \quad \text{avec } \omega_0^2 = \frac{T}{ml}.$$

Une équation analogue peut être écrite pour chaque masse du système, soit au total N équations différentielles.

Il convient à partir d'ici de chercher des solutions sinusoïdales correspondant aux **modes normaux**, en pratique des configurations de mouvement pour lesquelles toutes les particules oscillent à la même fréquence. Le mouvement de la particule N° p serait donné par : $s_p(t) = A_p \cos(\omega t)$.

Il ne reste plus alors qu'à trouver les amplitudes A_p et les pulsations ω qui vérifient les équations différentielles ci-dessus. Comme condition initiale, il faut alors prendre la vitesse initiale de chaque particule égale à 0, la vitesse étant donnée par :

$$(4.2) \quad \frac{ds_p}{dt}(t) = -\omega A_p \sin(\omega t).$$

On remplace les solutions dans les équations différentielles et l'on obtient :

$$(-\omega^2 + 2\omega_0^2) A_1 - \omega_0^2 (A_2 + A_0) = 0$$

$$(-\omega^2 + 2\omega_0^2) A_2 - \omega_0^2 (A_3 + A_1) = 0$$

.....

$$(-\omega^2 + 2\omega_0^2) A_n - \omega_0^2 (A_{n+1} + A_{n-1}) = 0$$

ce qui peut s'écrire sous la forme réduite suivante :

$$(4.3) \quad (-\omega^2 + 2\omega_0^2) A_p - \omega_0^2 (A_{p+1} + A_{p-1}) = 0$$

Il faut ajouter les conditions aux limites : $A_0 = 0$ et $A_{n+1} = 0$.

Existe-t-il des solutions pour toutes ces équations différentielles avec la même valeur pour ω ?

En réécrivant l'équation (a) sous la forme

$$\frac{A_{p-1} + A_{p+1}}{A_p} = \frac{-\omega^2 + 2\omega_0^2}{\omega_0^2}$$

nous constatons que pour une valeur particulière de ω , le terme de droite est constant, ce qui impose alors que le terme de gauche le soit également, ce qui veut dire que les amplitudes ne dépendent pas alors de p . Quelles valeurs doit-on conférer aux paramètres A_p pour que cette condition soit satisfaite, ainsi que les conditions aux limites (sur A_0 et A_{n+1}) ?.

Quelques éléments vers une solution :

Nous supposons ici que par un **génial trait d'intuition**, il nous apparaît que l'expression :

$$(4.4) \quad A_p = C \sin(p\theta)$$

avec θ un paramètre à définir, pourrait permettre de décrire l'amplitude de la particule N° p . En utilisant une expression similaire pour les amplitudes des particules $p-1$ et $p+1$, nous aurons la relation suivante entre les amplitudes des particules $p-1$, p et $p+1$:

$$(4.5) \quad \begin{aligned} A_{p-1} + A_{p+1} &= C \sin[(p-1)\theta] + C \sin[(p+1)\theta] = \\ 2C \sin p\theta \cos \theta &= 2 A_p \cos \theta \end{aligned}$$

ce qui permet d'écrire :

$$(4.6) \quad \frac{A_{p-1} + A_{p+1}}{A_p} = 2 \cos \theta$$

A comparer avec ce que nous avons plus haut (où nous cherchions des solutions –appelées **modes-** avec la même pulsation pour tous les oscillateurs du système) : $\frac{A_{p-1} + A_{p+1}}{A_p} = \frac{-\omega^2 + 2\omega_0^2}{\omega_0^2}$

L'intuition était donc vraiment géniale !

Le terme de droite de l'expression ci-dessus est effectivement indépendant de p . Il ne reste plus qu'à trouver des valeurs pour θ .

Pour cela nous pouvons utiliser les conditions aux limites ($A_0 = 0$ et $A_{p+1} = 0$). Pour A_0 , l'équation $\frac{A_{p-1} + A_{p+1}}{A_p} = 2 \cos \theta$ est vérifiée ; pour A_n , la condition est vérifiée si nous prenons :

$$(4.7) (N+1)\theta = n\pi \text{ ou encore } \theta = \frac{n\pi}{N+1}$$

Ce résultat nous permet d'écrire les amplitudes des oscillateurs sous la forme :

$$(4.8) \quad A_p = C \sin\left(\frac{pn\pi}{N+1}\right)$$

Les pulsations ω des modes normaux peuvent alors être obtenues à partir de :

$$\frac{A_{p-1} + A_{p+1}}{A_p} = \frac{-\omega^2 + 2\omega_0^2}{\omega_0^2} = 2 \cos\left(\frac{n\pi}{N+1}\right)$$

Il en résulte une expression pour ω^2 :

$$(4.9) \quad \omega^2 = 2\omega_0^2 \left[1 - \cos\left(\frac{n\pi}{N+1}\right) \right] = 4\omega_0^2 \sin^2 \left[\frac{n\pi}{2(N+1)} \right]$$

$$(4.10) \quad \omega_n = 2\omega_0 \sin \left[\frac{n\pi}{2(N+1)} \right].$$

Comme $\left| \sin \left[\frac{n\pi}{2(N+1)} \right] \right| \leq 1$, les vibrations qui peuvent exister ont une pulsation $\omega < 2\omega_0$.

3.1.2.2. Modes normaux du système de N oscillateurs couplés.

A chaque valeur de l'entier n, correspond une pulsation particulière d'oscillation, valable pour tous les oscillateurs ; c'est ce que nous appelons un mode propre de vibration du système.

Le mouvement d'une masse en oscillation dépend de sa position p sur la corde et de l'ordre n du mode considéré. L'amplitude est donnée par l'expression :

$$(4.11) \quad A_{pn} = C_n \sin\left(\frac{pn\pi}{N+1}\right) \text{ où } C_n \text{ détermine l'amplitude d'excitation du mode d'ordre n.}$$

Lorsque le système vibre à la pulsation ω_n , la masse m_p se déplace suivant l'expression :

$$(4.12) \quad s_{pn}(t) = A_{pn} \cos \omega_n t, \text{ } A_{pn} \text{ et } \omega_n \text{ étant données par les expressions ci-dessus.}$$

L'expression ci-dessus suppose que toutes les masses sont immobiles à l'instant initial. Pour considérer des conditions initiales quelconques, il suffit

$$(4.13) \quad s_{pn}(t) = A_{pn} \cos (\omega_n t + \varphi_n),$$

Quel est le nombre de modes normaux pour le système de N oscillateurs considéré ici ?

Comme il y a une pulsation propre pour chaque valeur de n, il y a donc n= N modes.

Nous pouvons mieux le voir en considérant le graphe $\omega_n = f\left(\frac{n\pi}{2(N+1)}\right) = f(\theta)$ où apparaissent uniquement les valeurs positives (valeurs absolues du sinus).

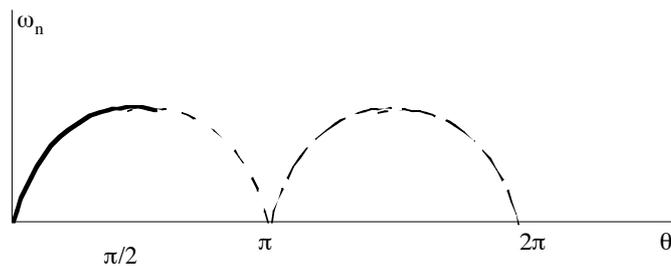


Fig. 4-5 : Graphe $\omega_n = f\left(\frac{n\pi}{2(N+1)}\right) = f(\theta)$

Pour n = 1 à N, nous avons effectivement N valeurs de pulsations. Pour n = N+1 (ce qui correspond à $\theta = \pi/2$), nous obtenons une pulsation maximale $\omega_{\max} = 2\omega_0$. Cependant cette pulsation ne correspond pas à une vraie oscillation puisque les amplitudes correspondantes sont toutes égales à 0.

Pour n = N+2, nous avons :

$$(4.14) \quad (6.24) \quad \omega_{N+2} = 2\omega_0 \sin \left[\frac{(N+2)\pi}{2(N+1)} \right] = 2\omega_0 \sin \left[\pi - \frac{n\pi}{2(N+1)} \right]$$

$$(4.15) \quad \text{soit } \omega_{N+2} = 2\omega_0 \sin \left[\frac{N\pi}{2(N+1)} \right] = \omega_N$$

Il en est de même pour les pulsations suivantes ($\omega_{N+p} = \omega_p$). De même il est possible de montrer que les amplitudes d'oscillations des particules reprennent également les mêmes valeurs, ce qui montre bien qu'il ne s'agit pas de nouveaux modes d'oscillation pour le système.

3.1.2.3. Les amplitudes des modes propres du système de N oscillateurs couplés.

A quoi ressemblent les différents modes ?
 Pour le mode $n=1$, les amplitudes d'oscillations sont données par :

$$(4.16) \quad s_{p1}(t) = A_{p1} \cos \omega_1 t = C_1 \sin \left(\frac{p\pi}{N+1} \right) \cos \omega_1 t \quad (\text{avec } p = 1, 2, 3 \dots N).$$

A un instant donné, le coefficient $C_1 \cos \omega_1 t$ est le même pour tous les oscillateurs. C'est le terme $C_1 \sin \left(\frac{p\pi}{N+1} \right)$ qui marque la différence entre les différents oscillateurs. La courbe correspondante tracée ci-dessous indique bien la position des particules. Entre les positions des particules obtenues pour les valeurs discrètes de p , la courbe n'a pas de signification physique. Cette courbe est un guide pour localiser les particules ; quant à la corde élastique qui relie les particules, elle est bien constituée de segments de droite.



Fig. 4-6 : Mode $n = 1$ pour $N = 5$. (a) Lieu des points de localisation des particules - (b) Forme réelle du système au maximum d'amplitude

La figure ci-après montre les positions des masses pour le mode $n=2$.

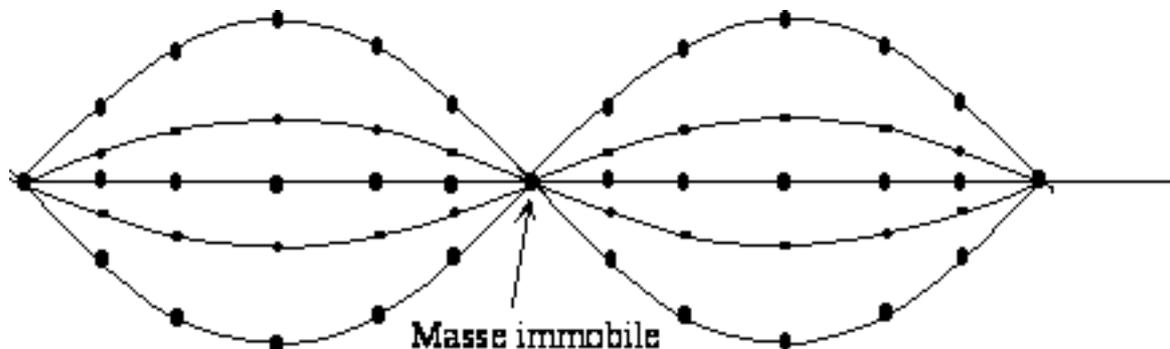


Fig. 4-7 : Positions des masses pour $N = 11$ et $n = 2$.

L'analyse des modes de vibration d'une ligne de masses disposées régulièrement le long d'une corde peut être extrapolée aux vibrations observées au sein d'un réseau d'atomes d'un matériau

cristallin. Par analogie, il est possible de prévoir que les fréquences du réseau sont données par l'expression :

$$(4.17) \quad f_n = 2f_0 \sin\left(\frac{n\pi}{2(N+1)}\right)$$

On montrera dans la partie ‘Ondes’ du cours que f_0 est donné par l’expression $f_0 = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$

$E =$ Module d'Young, $\rho =$ masse volumique, $l =$ distance interatomique).

f_0 correspond à la plus haute fréquence (ou fréquence de coupure) à laquelle le cristal peut osciller. Il est possible de montrer que les valeurs trouvées en pratique sont de l'ordre de 10^{13} Hz, c'est-à-dire dans l'infra-rouge. On peut donc s'attendre à des bandes d'absorption du rayonnement par certains cristaux dans cette bande du spectre électromagnétique.

3.2. LIGNE ÉLECTRIQUE CONSTITUÉE D'UN GRAND NOMBRE D'OSCILLATEURS L-C

Considérons une ligne d'oscillateurs électriques L-C (figure ci-après). Les oscillateurs sont positionnés périodiquement le long d'un axe $X'X$, a étant la distance qui sépare deux oscillateurs voisins. Une source S placée en début de ligne impose un courant $i_0(t) = I \cos(\omega t)$ dans l'inductance de la boucle placée au début (rang 1). Comme pour le système mécanique, on s'attend à ce que les oscillateurs voisins reproduisent le courant de la première boucle avec un certain retard. En régime permanent, tous les oscillateurs devraient osciller à la même pulsation ω . La question à poser est ici la suivante : est-ce que le signal électrique pourra se propager le long de la chaîne quelle que soit la pulsation imposée ?

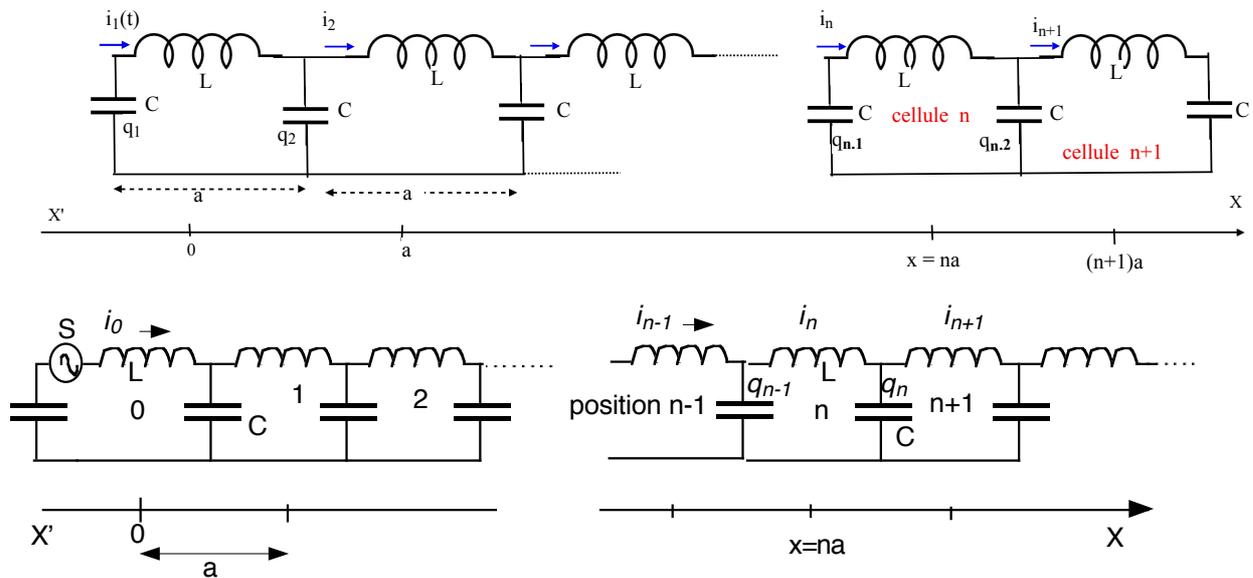


Fig. 4-8 : Oscillateur électrique à $N+1$ degrés de liberté.

La force électromotrice aux bornes de la n -ième inductance est donnée par :

$$(4.18) \quad \frac{q_n}{C} + L \frac{di_n}{dt} - \frac{q_{n-1}}{C} = 0$$

où q_{n-1} et q_n sont respectivement les charges positives sur les armatures « hautes » des condensateurs d'entrée et de sortie de la cellule d'indice n . Après dérivation, nous obtenons :

$$(4.19) \quad L \frac{d^2 i_n}{dt^2} + \frac{1}{C} \left(\frac{dq_n}{dt} - \frac{dq_{n-1}}{dt} \right) = 0.$$

La conservation des charges (loi des nœuds) nous permet d'écrire :

$$i_{n-1} = i_n + i_{C(n-1)} = i_n + \frac{dq_{n-1}}{dt} \quad \text{et} \quad i_n = i_{n+1} + i_{C(n)} = i_{n+1} + \frac{dq_n}{dt}$$

$$\text{ou encore : } \frac{dq_{n-1}}{dt} = i_{n-1} - i_n \quad \text{et} \quad \frac{dq_n}{dt} = i_n - i_{n+1}$$

Nous obtenons donc :

$$(4.20) \quad \frac{d^2 i_n}{dt^2} + \omega_0^2 (2i_n - i_{n-1} - i_{n+1}) = 0$$

avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$, la pulsation propre d'un oscillateur isolé.

Cette équation différentielle, fait apparaître la notion de propagation du signal électrique : la variation de courant du premier oscillateur se propage le long de la ligne. Les oscillateurs reproduiront tous le courant du premier, mais avec un retard de phase qui dépend de la position. Soit Φ le déphasage du mouvement entre l'oscillateur n et le suivant : $\Phi = \Phi_{n+1} - \Phi_n$.

On cherche une solution de la forme $i_n(t) = I \cos(\omega t - n \Phi)$, soit sous la forme complexe : $i_n(t) = I e^{-jn \Phi} e^{j\omega t}$.

Après introduction dans l'équation différentielle, on obtient :

$$-\omega^2 I e^{-jn\Phi} + \omega_0^2 \left[2I e^{-jn\Phi} - I e^{-j(n-1)\Phi} - I e^{-j(n+1)\Phi} \right] = 0$$

$$\text{ou } -\omega^2 + \omega_0^2 \left[2 - e^{+j\Phi} - e^{-j\Phi} \right] = 0$$

Ou encore : $-\omega^2 + \omega_0^2 \left[4 \sin^2 \frac{\Phi}{2} \right] = 0$, ce qui nous donne une expression pour ω :

$$\omega^2 = 4 \omega_0^2 \sin^2 \frac{\Phi}{2} \quad \text{ou} \quad \omega = 2 \omega_0 \left| \sin \frac{\Phi}{2} \right|.$$

Le premier oscillateur est au rang 0, l'oscillateur de rang n est à l'abscisse $x_n = na$ et le déphasage du mouvement de l'oscillateur n est $\Phi_n = n \Phi$. On a donc

$$\Phi_n = \frac{\Phi}{a} x_n = k x_n \quad \text{en posant} \quad k = \frac{\Phi}{a}.$$

k correspond donc à un déphasage par unité de longueur.

La solution s'écrit alors : $i_n(t) = I \cos(\omega t - k x_n)$ et la relation ci-dessus devient :

$$(4.21) \quad \boxed{\omega(k) = 2 \omega_0 \left| \sin \frac{ka}{2} \right|} = 2 \sqrt{\frac{1}{LC}} \left| \sin \left(\frac{ka}{2} \right) \right|$$

Cette relation entre la pulsation ω et le paramètre K est dite de **dispersion**.

Comme nous avons $\left| \sin \frac{ka}{2} \right| \leq 1$, les pulsations qui donnent lieu à un phénomène de vibration tout le long de la structure sont telles que $\omega \leq 2\omega_0$. Cette valeur constitue une pulsation limite (ou

de **pulsation de coupure**). Nous avons trouvé que, pour le système considéré, il existe des solutions sinusoïdales pour la répartition spatiale des amplitudes d'oscillation (fig. ci-après) à condition que la pulsation de l'excitation vérifie la relation $\omega \leq 2\omega_0 = 2\sqrt{1/LC}$.

Le terme ka n'est ici pas aussi bien justifié que dans le cas des pendules couplés ou de la corde élastique plombée. Nous pouvons tout de même dire qu'il s'agit de l'augmentation de phase observée en passant d'une inductance localisée à la suivante.

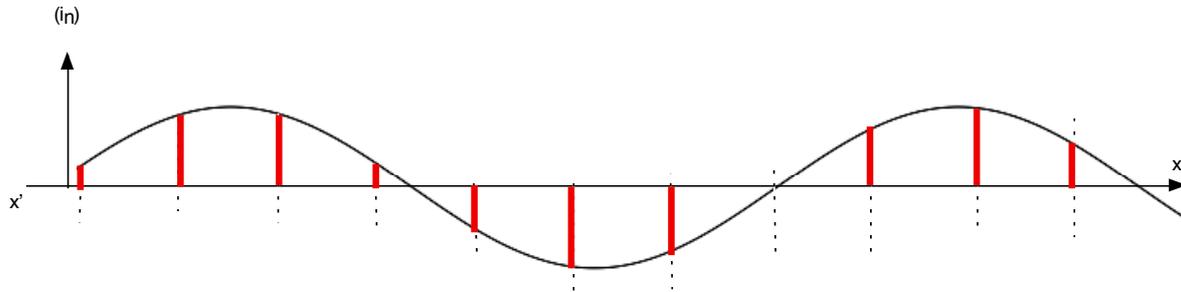


Fig. 4-9 : Répartition du courant le long de l'axe X'X à un instant donné.

3.3. INTRODUCTION AUX SYSTÈMES CONTINUS.

Les systèmes continus se caractérisent par des constantes réparties, par opposition aux constantes discrètes des systèmes à nombre finis de degrés de liberté qui peuvent se ramener à des associations de masses, de ressorts, amortisseurs. Dans les systèmes continus, chaque élément de matière joue à la fois le rôle de la masse, du ressort et de l'amortisseur. Les systèmes continus présentent théoriquement une quasi-infinité de modes normaux (ou modes), chaque mode se caractérisant par une fréquence particulière ; en pratique, on n'observe que les modes de basses fréquences. Les modes propres sont obtenus également à partir de la notion d'onde stationnaire développée plus loin.

Considérons par exemple un litre d'air. Il est constitué de $2,7 \times 10^{22}$ molécules, chacune ayant 3 degrés de liberté. Le nombre de modes de vibration est donc de 8×10^{22} environ. En pratique, seuls les **premiers modes** sont intéressants (suivant le cas, quelques unités, quelques dizaines ou quelques milliers). Ces modes les plus bas peuvent être analysés avec l'hypothèse d'un système parfaitement continu.

Lorsqu'une structure continue est sollicitée par une perturbation brève, le mouvement qui en résulte est une superposition de tous les modes, avec des amplitudes et des phases déterminées par les conditions initiales. L'analyse est évidemment alors très difficile, voire impossible.

L'analyse des vibrations d'un système continu peut être faite en suivant les étapes ci-après :

- Écrire l'équation de propagation d'une excitation dans le milieu,
- Chercher pour cette équation, des solutions $s(x,t)$ qui soient de la forme $s = X(x) T(t)$ où $X(x)$ est une fonction de la seule variable x et $T(t)$ une fonction du temps.
- Écrire que les solutions $s(x, t)$ satisfont les conditions aux limites du système étudié. On obtient alors l'équation aux fréquences propres, qui sont aussi les fréquences de résonance du système en régime forcé.
- Déterminer les constantes d'intégration en tenant compte des conditions initiales.

Une autre méthode, dite méthode des éléments finis, consiste à décomposer la structure complexe en petits éléments de forme simple (poutre, plaque, ..). On écrit les conditions aux limites en tenant compte des conditions de continuité. Le calcul permet de déterminer les matrices de masse et de raideur la structure dans son ensemble et d'en déduire les fréquences propres du système non amorti ainsi que les modes normaux.

3.4. MODES TRANSVERSAUX DE LA CORDE CONTINUE

Considérons le cas des masses reliées par une corde élastique avec N très grand ($N = 10^6$ ou plus). Pour un mode donné, on observe des points de la corde qui restent immobiles (appelés **nœuds**). Pour les modes les plus bas, chaque nœud est séparé du suivant par un grand nombre de masses. Pour obtenir une description des amplitudes de vibration par une fonction continue $s(x, y, z, t)$, nous ramenons en un point toutes les particules dont la **position d'équilibre** est voisine de (x, y, z) en leur attribuant le même vecteur 'déplacement instantané' $\overrightarrow{s(x,y,z,t)}$:

$$(4.22) \quad \overrightarrow{s(x,y,z,t)} = \overrightarrow{u}_x \cdot s_x(x,y,z,t) + \overrightarrow{u}_y \cdot s_y(x,y,z,t) + \overrightarrow{u}_z \cdot s_z(x,y,z,t)$$

Pour une simple la forme ci-dessus est trop générale. Si Ox est l'axe de la corde, la coordonnée x suffit à préciser la position d'équilibre de chaque masse (à Δz près).

$$(4.23) \quad \overrightarrow{s(x,t)} = \overrightarrow{u}_x \cdot s_x(x,t) + \overrightarrow{u}_y \cdot s_y(x,t) + \overrightarrow{u}_z \cdot s_z(x,t)$$

Deux situations se présentent en pratique.

- Le déplacement des masses se fait suivant l'axe x : il s'agit alors d'une **vibration longitudinale**.

• Le déplacement se fait suivant Oy et Oz, les axes perpendiculaires à la corde : on s'agit alors d'une **vibration transversale** pour laquelle on peut supposer $s_x(x, t) = 0$, soit :

$$(4.24) \quad \overrightarrow{s(x,t)} = \vec{u}_y \cdot s_y(x,t) + \vec{u}_z \cdot s_z(x,t)$$

On peut encore simplifier en considérant une vibration suivant y (ou z). On a alors une **polarisation rectiligne**. $s(x, t)$ est alors le déplacement transversal instantané des particules dont la position d'équilibre est en x.

L'application de la seconde loi de Newton à un segment de la corde déformée (tension T et masse linéique μ) nous permet d'établir la relation suivante

$$(4.25) \quad \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \frac{T}{\mu} \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} .$$

La constante $\sqrt{\frac{T}{\mu}}$ qui a la même dimension qu'une vitesse, est particulière au système décrit ici.

L'équation obtenue ici à partir uniquement de notions liées aux vibrations, est tout simplement l'équation qui gouverne le concept d'**onde** traité précédemment.

Les modes qui ont été définis précédemment pour les systèmes à N degrés de liberté peuvent être généralisés ici pour les systèmes continus. Lorsque la corde considérée ici vibre sur un mode unique, toutes ses parties oscillent à la même fréquence et avec la même constante de phase. Un mode se caractérise par

• une fonction $s(x, t)$ décrivant le déplacement des éléments de la corde dont la position d'équilibre est en z. La dépendance en t de la forme **cos($\omega t + \varphi$)** est la même toutes les particules.

Pour une corde continue ($N \rightarrow \infty$), l'amplitude de vibration $A(x)$ des degrés de liberté en x peut s'écrire comme une fonction continue de x. La forme de $A(x)$ dépend du mode considéré ; chaque mode se caractérise une forme différente. La forme générale est la suivante :

$$(4.26) \quad s(x, t) = A(x) \cos(\omega t + \varphi)$$

L'accélération correspondante est alors : $\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = -\omega^2 s$.

On en déduit la dérivée seconde en z : $\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \cos(\omega t + \varphi) \frac{d^2 A(x)}{dx^2}$ qui s'écrit encore :

$$(4.27) \quad \frac{d^2 A(x)}{dx^2} = -\omega^2 \frac{\mu}{T} A(x) .$$

Cette équation est identique par sa forme à celle de l'oscillateur harmonique, l'oscillation ayant lieu ici dans l'**espace** et non dans le **temps**. La forme générale de la solution est :

$$(4.28) \quad A(x) = A \sin\left(2\pi \frac{x}{\lambda}\right) + B \cos\left(2\pi \frac{x}{\lambda}\right).$$

La grandeur caractéristique de cette oscillation spatiale est la distance λ sur laquelle une oscillation complète se produit. Ce paramètre appelé **longueur d'onde** apparaît ici sans que le phénomène de propagation du mouvement ait été considéré.

3.5. VIBRATIONS LONGITUDINALES DE BARRES.

Considérons le barreau encastré représenté ci-après.

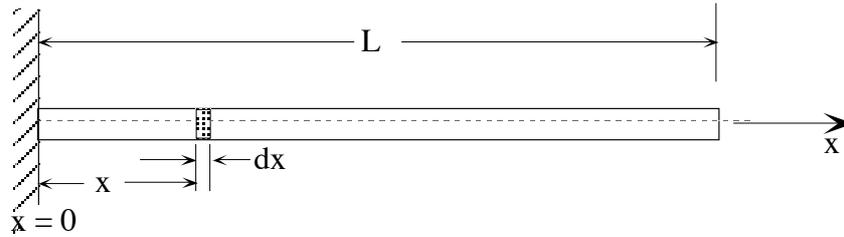


Fig. 4-10 : Barre en vibration longitudinale

Lorsque la barre est en vibration longitudinale, l'élément dx, situé à l'abscisse x, est soumis à un mouvement vibratoire $s(x, t)$. Le mouvement de vibration se déplace le long de la barre suivant l'équation de propagation suivante :

$$(4.29) \quad \frac{\delta^2 s}{\delta t^2} = c^2 \frac{\delta^2 s}{\delta x^2} .$$

$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ est la célérité de propagation d'une excitation longitudinale, E étant le module d'Young et ρ , la masse volumique.

En cherchant des solutions de la forme $s = X(x) T(t)$, on obtient

$$(4.30) \quad \ddot{T} X = c^2 \dot{X} \dot{T} \quad \text{avec} \quad \ddot{T} = \frac{\delta^2 T}{\delta t^2} \quad (\text{idem pour } \dot{X})$$

ce qui peut encore s'écrire

$$(4.31) \quad \frac{\ddot{T}}{T} = c^2 \frac{\ddot{X}}{X} = -p_i^2$$

Le signe (-) devant la constante p_i vient de ce que nous cherchons à priori des solutions sinusoidales, la double dérivation du sinus donnant le signe -.

Nous pouvons extraire de l'équation ci-dessus, 2 équations :

$$(4.32) \quad \ddot{T} + p_i^2 T = 0 \quad \text{et} \quad \ddot{X} + \frac{p_i^2}{c^2} X = 0 \quad \text{dont les solutions sont :}$$

$$(4.33) \quad T_i = A_i \cos p_i t + B_i \sin p_i t \quad \text{et} \\ X_i = C_i \cos \frac{p_i X}{c} + D_i \sin \frac{p_i X}{c} .$$

A_i et B_i sont des constantes obtenues à partir des conditions initiales (déplacement et vitesse à $t=0$).

C_i et D_i sont des constantes obtenues en étudiant le comportement du système aux extrémités ($x=0$ et $x=L$). La solution générale a la forme suivante : $s(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} T_i X_i$

Détermination des constantes p_i .

A $x=0$, on $s=0$ à tout moment. Cela implique que $C_i=0$.

A $x=L$, il n'y a pas de contrainte exercée sur la face extérieure. Or la contrainte σ en tout point est donnée par $\sigma = E \epsilon = E \frac{\delta s}{\delta x}$. Pour le cas considéré ci-dessus, on a $\frac{\delta s}{\delta x}(L) = 0$ à tout instant t.

Compte tenu de ces conditions aux limites, on obtient : $D_i \frac{p_i}{c} \cos \frac{p_i L}{c} = 0$

soit $\frac{p_i L}{c} = (2k - 1) \frac{\pi}{2}$ pour $k = 1; 2; 3; \dots$

$$\text{avec } p_i = \frac{(2k - 1) \pi c}{2L} = \frac{(2k - 1) \pi \sqrt{\frac{E}{\rho}}}{2L}.$$

Les pulsations propres (et donc de résonance possible) sont les suivantes :

$$(4.34) \quad \omega_i = p_i = \frac{(2k - 1) \pi}{2L} c.$$

En utilisant la relation $\sigma = E \varepsilon = E \frac{\delta s}{\delta x}$ on montre que les nœuds de déplacements sont des ventres de contrainte et vice-versa.

3.6. VIBRATIONS TRANSVERSALES DE PLAQUES ET DE PANNEAUX

L'équation de propagation est alors la suivante :

$$(4.35) \quad \frac{\delta^4 z}{\delta x^4} + \frac{2 \delta^4 z}{\delta x^2 \delta y^2} + \frac{\delta^4 z}{\delta y^4} + \frac{12 \rho (1 - \nu^2)}{E h^2} \frac{\delta^2 z}{\delta t^2} = 0$$

ρ : masse volumique ; ν : coefficient de Poisson ; h : épaisseur de la plaque. L'étude mathématique n'est aisée que dans des cas très particuliers.

Remarques : Une technique expérimentale simple consiste à saupoudrer la plaque de sable fin et de l'exciter avec un pot vibrant. Les lignes nodales se manifestent alors par des lignes d'accumulation de sable, caractéristiques des nœuds et ventres de vibration.

L'utilisation de la lumière d'un laser permet également de visualiser les lignes nodales ; la technique utilisée est alors celle de l'interférométrie holographique en temps moyenné.

3.7. VIBRATION DE STRUCTURES ANNULAIRES

Une application importante pour le domaine électrique est le calcul des vibrations des bâtis de machines électriques. Dans le cas d'un anneau dont la masse et l'élasticité sont uniformément réparties le long de son périmètre, on montre que la forme exacte que prend l'anneau quand il vibre est une sinusoïde rapportée au développement de sa circonférence. La figure ci-après montre la forme de l'anneau pour les modes de vibrations à 4, 6 ou 8 points nodaux (d'après Den Hartog).

Les pulsations correspondant aux modes propres montrés ci-dessus sont données par :

$$(4.36) \quad \omega_n = \frac{n(n^2 - 1)}{\sqrt{n^2 + 1}} \sqrt{\frac{EI}{\mu_1 R^4}}$$

où n est le nombre d'ondes complètes (soit la moitié du nombre de nœuds) ; μ_1 est la masse linéique de l'anneau ; I est le moment d'inertie surfacique à la flexion de la section annulaire ; E est le module d'Young ; R est le rayon de la plaque.

En pratique, des termes correctifs sont nécessaires pour tenir compte de la présence des pôles et de la rigidité de l'embase.

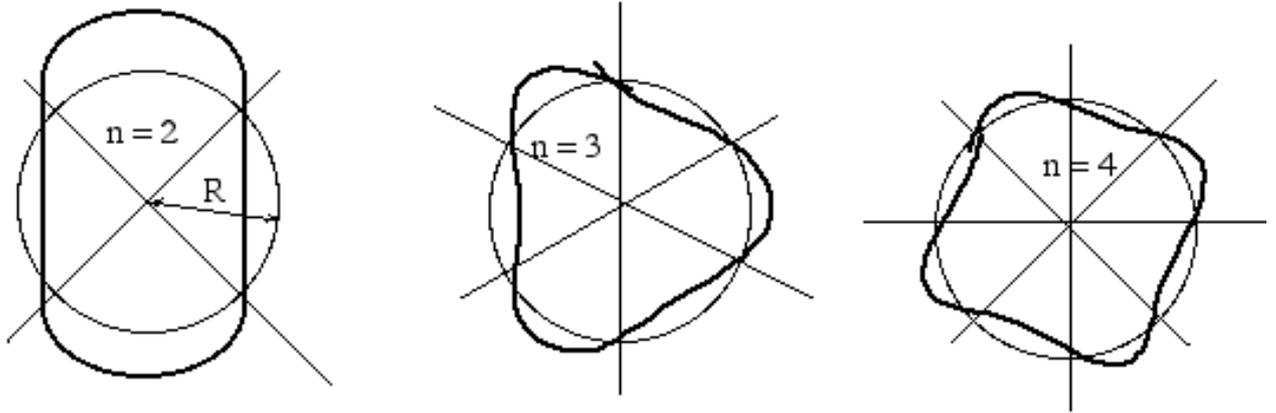


Fig. 4-11 : Modes de vibration d'une plaque circulaire

3.8. ANALYSE FRÉQUENTIELLE DES VIBRATIONS

3.8.1. INTRODUCTION

Dans les cas de systèmes physiques réels en vibration, l'enregistrement du signal en fonction du temps apparaît souvent complexe et peu utile. On peut seulement savoir si on dépasse des seuils jugés dangereux ou critiques. Une information plus fine est obtenue par une analyse du contenu fréquentiel de la vibration. Pour cela on utilise le résultat établi par Fourier : un signal quelconque de durée finie, peut toujours être représenté par une somme de signaux sinusoïdaux. Le but de l'analyse en fréquence est de déterminer les fréquences, les amplitudes, éventuellement les phases de ces composantes sinusoïdales. L'analyse fréquentielle est utile pour :

- l'identification des sources de bruit et de vibrations;
- la caractérisation de suspensions antivibratiles, d'absorbeurs acoustiques;
- la surveillance des machines pour une maintenance préventive;
- les équilibrages dynamiques de structure;
- la recherche de modes propres de vibration des structures;
- la caractérisation d'amortissement structural;
- l'intensimétrie acoustique;
- l'étude des matériaux;
- la détermination expérimentale de fonctions de transfert des systèmes mécaniques ou électriques linéaires.

3.8.2. CARACTÉRISTIQUES DES SIGNAUX VIBRATOIRES

3.8.2.1. Définitions

Grandeur vibratoire $G(t)$

Une grandeur vibratoire varie de façon périodique entre 2 valeurs extrêmes dites valeurs de crêtes (peak value). Une grandeur caractéristique est l'intervalle entre les deux **valeurs maximales** (ou crête à crête) $|G^{+cr}| + |G^{-cr}|$.

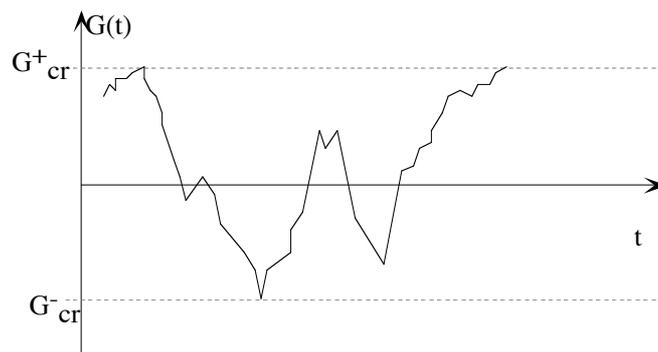


Fig. 4-12 : Variation de l'amplitude d'une grandeur vibratoire.

Valeur moyenne

La valeur moyenne (ou composante continue) du signal pendant une durée t_2-t_1 est donnée par :

$$G_{moyen} = \bar{G} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} G(t) dt$$

Valeur efficace

Toute vibration contient une énergie qui est proportionnelle à la valeur efficace G_{eff} (ou RMS pour Root Mean Square) de la grandeur vibratoire :

$$(4.37) \quad G_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} G^2(t) dt} .$$

Cette grandeur correspond à la valeur du signal continu qui aurait la même énergie pendant l'intervalle de temps correspondant.

Valeur moyenne du module

La valeur moyenne du module est donnée par :

$$(4.38) \quad G_{\text{module.moyen}} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |G(t)| dt .$$

Cette grandeur est moins intéressante que la valeur efficace, mais c'est celle que donnent les instruments électriques ordinaires sur la position 'alternatif'. Les instruments électriques redressent le signal et moyennent le résultat. Cette procédure n'est correcte que si le signal est purement sinusoïdal ; dans le cas contraire, il faut utiliser un appareil qui donne la valeur efficace vraie.

Les types de mouvements vibratoires

On distingue les différents types suivants de mouvements vibratoires :

- déterministe
 - périodique ou
 - transitoire ;
- aléatoire
 - stationnaire ou
 - transitoire.

Les signaux déterministes sont ceux qui peuvent être représentés sous forme d'une fonction mathématique. Les signaux aléatoires sont décrits en termes de probabilités ou de valeurs moyennes. Un signal est stationnaire si cette description est reproductible pour divers échantillons semblables.

3.8.2.2. Signal sinusoïdal

Un signal sinusoïdal s'écrit : $s(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, A , est l'amplitude (valeur maximale) ; $\omega = 2\pi/T = 2\pi\nu$ est la pulsation, ν la fréquence.

La valeur moyenne est nulle. La valeur efficace est égale à : $S_{\text{eff}} = A/\sqrt{2}$.

3.8.2.3. Signaux périodiques - La décomposition en série de Fourier

Soit la fonction périodique $F(t)$, de période T . Il existe une série de coefficients $\{a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n\dots}\}$ et $\{b_0, b_1, b_2, b_3, \dots, b_{n\dots}\}$ tels que [2] :

$$(4.39) \quad F(t) = a_0 + b_1 \cos(\omega t) + c_1 \sin(\omega t) + b_2 \cos(2\omega t) + c_2 \sin(2\omega t) + \dots + b_n \cos(n\omega t) + c_n \sin(n\omega t) + \dots$$

² « Cours élémentaire de mathématiques supérieures » - J. Quinet ; Dunod, Paris 1973

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [b_n \cos(n\omega t) + c_n \sin(n\omega t)] \quad \text{avec } \omega = \frac{2\pi}{T} .$$

Les coefficients sont obtenus par les relations :

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T F(t) dt , \text{ la composante continue ;}$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cos(n\omega t) dt , \text{ la composante de l'harmonique d'ordre n en cosinus ;}$$

$$c_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \sin(n\omega t) dt , \text{ la composante de l'harmonique d'ordre n en sinus.}$$

La décomposition de F(t) peut aussi se mettre sous la forme :

$$(4.40) \quad F(t) = a_0 + a_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + a_2 \cos(2\omega t + \varphi_2) + \dots + a_n \cos(n\omega t + \varphi_n) + \dots$$

avec $a_n = \sqrt{b_n^2 + c_n^2}$, le spectre des amplitudes et $\varphi_n = \arctan\left(\frac{c_n}{b_n}\right)$ le spectre des phases.

Spectre de Fourier.

L'ensemble des coefficients a_n et φ_n , constitue le spectre de Fourier du signal (figure ci-dessous).

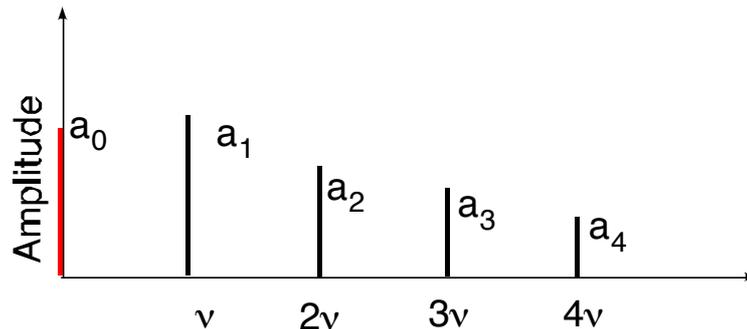


Fig. 4-13 : Exemple de spectre de Fourier ($\nu = \omega/2\pi$)

Remarque : En utilisant le théorème d'Euler, il est possible d'écrire la décomposition sous forme complexe :

$$(4.41) \quad F(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n e^{jn\omega t} + A_{-n} e^{-jn\omega t}] .$$

3.8.2.4. Fonctions non périodiques - La transformée de Fourier

Transformée de Fourier directe

La décomposition d'une fonction peut être étendue à une fonction non périodique ; pour cela on fait tendre la période T vers l'infini. La suite des harmoniques $n\omega$ devient alors une pulsation ω continûment variable. La transformée s'écrit alors :

$$(4.42) \quad F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

$F(\omega)$ est un nombre complexe ; soient $R(\omega)$ et $J(\omega)$ les parties réelles et imaginaires. $R(\omega)$ et $J(\omega)$ constituent les densités spectrales continues en cosinus et sinus de la fonction F(t).

Le spectre des amplitudes est donné par : $a(\omega) = |F(\omega)| = \sqrt{R^2(\omega) + J^2(\omega)}$.

Le spectre de phase est donné par : $\Phi(\omega) = \arctan\left(\frac{J(\omega)}{R(\omega)}\right)$

Lorsque F(t) représente une vibration, l'énergie contenue dans la composante à la pulsation ω est donnée par (Théorème de Parseval) : $E(\omega) = [a(\omega)]^2$.

Transformée de Fourier inverse.

À partir des coefficients F(ω), il est possible de retrouver la fonction F(t) ; pour cela on utilise la transformée de Fourier inverse :

$$(4.43) \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega .$$

Spectre et égalité de Parseval.

Un signal pouvant être représentée par sa distribution énergétique temporelle $|f(t)|^2$ ou spectrale $|f(\omega)|^2$, l'égalité suivante est observée (Théorème de Parseval) :

$$(4.44) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(\omega)|^2 d\omega .$$

Exemples de calculs de la transformée de Fourier

La fonction "porte"

La fonction "porte" est définie par :

$$f(t) = 0 \text{ pour } t < -\tau \text{ et } t > \tau \text{ et } f(t) = a \text{ pour } -\tau \leq t \leq \tau$$

La transformée de Fourier est donnée par l'expression :

$$F(\omega) = 2a\tau \frac{\sin(\omega\tau)}{\omega\tau} . \text{ La représentation graphique apparaît ci-après.}$$

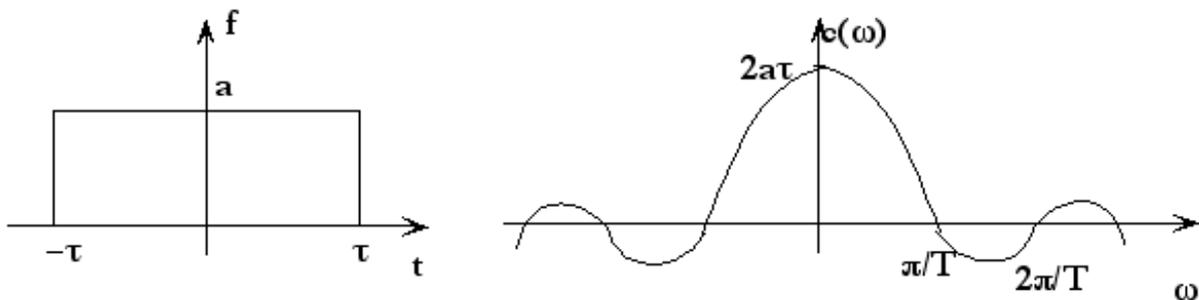


Fig. 4-14 : Fonction "porte" et sa transformée de Fourier

Remarque : En pratique, tout processus réel étant limité dans le temps, est décrit par une fonction f(t) encadré par une fonction porte. Le spectre est donc toujours une convolution du spectre propre avec celui de la fonction porte.

3.8.3. ANALYSE FRÉQUENTIELLE DES SYSTÈMES PHYSIQUES LINÉAIRES

La transformée de Fourier joue un grand rôle dans l'étude aussi bien théorique qu'expérimentale, des fonctions de transfert des systèmes vibratoires.

La linéarité d'un système signifie que la réponse du système à un ensemble d'excitations simultanées, est la somme des réponses à chaque excitation prise séparément.

Considérons le système mécanique masse-ressort amorti étudié précédemment. Appliquons à la masse m initialement à l'équilibre, une brève impulsion mécanique, ce qui revient à imposer les conditions initiales $x(0)=0$ et $\dot{x}(0) = v_0$. Dans le cas où l'amortissement h est inférieur à l'amortissement critique, la réponse impulsionnelle est donnée par :

$$(4.45) \quad x(t) = X_0 e^{-\beta t} \cos(\omega_p t + \varphi)$$

$$\text{avec } \beta = \frac{h}{2m} \text{ et } \omega_p = \sqrt{\frac{K}{m} - \left(\frac{h}{2m}\right)^2}.$$

X_0 et φ sont déterminées par les conditions initiales.

Si on applique au système une excitation périodique de la forme $f(t) = F \cos \omega t$, la réponse se décomposera en :

- une réponse transitoire qui disparaîtra progressivement et
- une réponse forcée permanente du type $x = X \cos (\omega t + \varphi)$. Les paramètres du régime permanent dépendent de ω , K et K' mais ne dépendent pas des conditions initiales.

En faisant varier la fréquence du signal d'excitation, on décrit la réponse en fréquence du système. La réponse en fréquence est donnée par la fonction de transfert T , reliant la grandeur d'entrée constituée par la force f à la grandeur de sortie, constituée par le déplacement X de la masse. T est obtenue à partir de la relation (1.44) :

$$(4.46) \quad T = \frac{1}{\sqrt{(K - m\omega^2)^2 + h^2\omega^2}}$$

La réponse à une excitation quelconque est obtenue par la transformée de Fourier. Soit $F(\omega)$ les coefficients de la décomposition de $f(t)$. On peut considérer que l'entrée est la superposition de fonctions sinus et cosinus. A chaque composante d'entrée $\frac{1}{2\pi} E(\omega) d\omega$ correspond une sortie d'amplitude complexe $\bar{T} \frac{1}{2\pi} E(\omega) d\omega$. Le système étant linéaire, la réponse totale est la somme des réponses partielles :

$$(4.47) \quad x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{T} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Le deuxième membre étant la T.F. inverse de $\bar{T} E(\omega)$, on peut écrire :

$$(4.48) \quad X(\omega) = \bar{T} F(\omega)$$

Remarque : Si le signal d'excitation est une impulsion (durée \times hauteur = a avec $a = 1$ pour une impulsion de Dirac), on

$$F(\omega) = a \text{ d'où } \bar{T} = \frac{X(\omega)}{a}. \text{ Il en résulte que :}$$

la fonction de transfert (ou réponse en fréquence) d'un système linéaire, est la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle.

Cette constatation offre deux avantages :

- d'un point de vue expérimental, il est plus facile et plus rapide d'obtenir la réponse impulsionnelle que de faire une analyse par variation de la fréquence du signal d'excitation,
- le formalisme décrit ci-dessus devient adapté au calcul numérique, donc à l'emploi de moyens informatiques.

3.8.4. ANALYSE MODALE EXPÉRIMENTALE

3.8.4.1. Montage expérimental

Dans la pratique de l'ingénieur, l'étude des systèmes en vibration est souvent une étape utile qui complète l'étude théorique et la modélisation. La recherche des modes propres par l'expérience (ou analyse modale expérimentale) permet de caractériser la structure et de corriger éventuellement ses défauts, pour diminuer le risque de rupture et d'usure prématurée, et pour diminuer les nuisances acoustiques produites par les vibrations près des fréquences propres.

L'analyse modale passe par :

- le choix d'un système d'excitation (pot vibrant ou choc),
- le choix d'un capteur pour mesurer la réponse,
- le choix d'un système de traitement et d'affichage des informations.

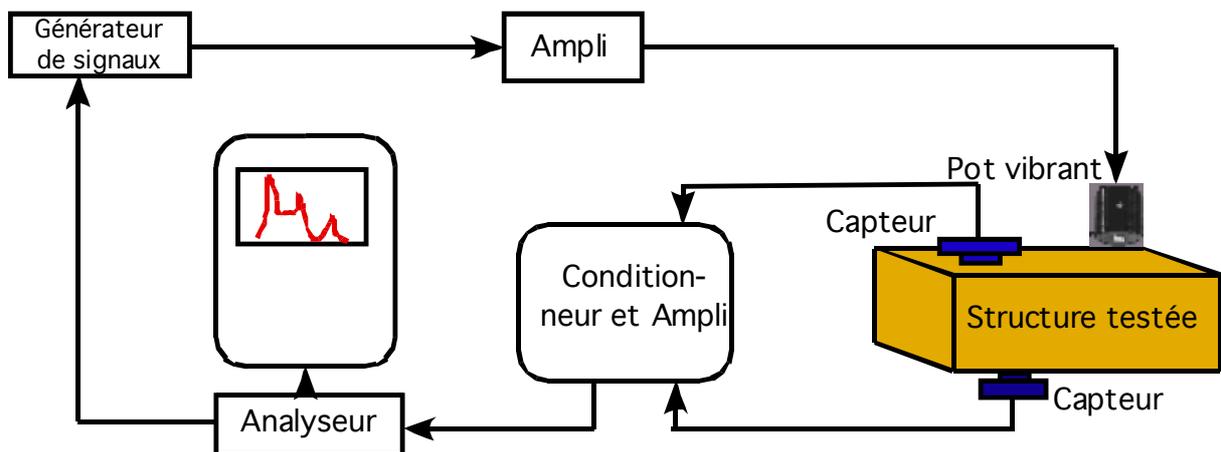


Fig. 4-15 : Chaîne de mesure de vibrations d'une structure.

La figure ci-dessus montre la chaîne de mesure de vibrations. Le pot vibrant est choisi en fonction de la nature et de la dimension de la structure à tester. Les capteurs utilisés peuvent être des accéléromètres qui transmettent à l'analyseur, via un conditionneur et amplificateur un signal analogique. Dans l'analyseur le signal analogique est transformé en signal numérique. L'appareil calcule la transformée de Fourier du signal.

3.8.4.2. Analyse du signal

Le signal $f(t)$ en provenance du capteur est échantillonné. Cela signifie qu'une valeur est enregistrée chaque intervalle de temps Δt ; N valeurs sont enregistrées au total et le calcul est fait sur ces N valeurs prises à intervalles réguliers, $t_0, t_1=t_0+\Delta t, \dots, t_N=t_0+N\Delta t$. L'enregistrement est caractérisé par un temps d'échantillonnage $T = N\Delta t$ et une fréquence d'échantillonnage $F = 1/\Delta t$. Le calcul effectué est une TFD (transformée de Fourier discrète). La TFD est obtenue par le calcul suivant :

$$(4.49) \quad f(t_l) \xrightarrow{TFD} A_k = \sum_{l=0}^{N-1} f(t_l) \cdot \exp\left(-i \frac{2\pi k l}{N}\right).$$

A_k est un nombre complexe et peut donc être représenté comme la somme d'une partie réelle et d'une partie imaginaire :

$$(4.50) \quad A_k = \sum_{l=0}^{l=N-1} f(t_l) \cdot \cos\left(\frac{2\pi kl}{N}\right) - i \sum_{l=0}^{l=N-1} f(t_l) \cdot \sin\left(\frac{2\pi kl}{N}\right)$$

$$(4.51) \quad \text{ou } A_k = A_{k.r\acute{e}el} - i A_{k.im} .$$

Sur l'échelle des fréquences, seule la partie positive a une signification physique.

Il convient également d'éviter les phénomènes de repliement de spectre qui apparaît lorsque la fréquence d'échantillonnage est inférieure à 2 fois la fréquence la plus élevée du signal. Cela signifie que le temps d'échantillonnage Δt doit être suffisamment petit pour que 2 au moins valeurs par période de la composante la plus rapide soient prélevées et calculées (condition de Shannon).

Dans la pratique, la transformée de Fourier est calculée par une méthode dite TFT (Transformée de Fourier Rapide). L'algorithme utilisé exige que le nombre d'échantillons soit une puissance 2.

Des informations complémentaires sont données dans le document [*Prérequis aux TP 4 et 5 – Acquisition et traitement du signal*].

ANNEXES

**3.9. ANNEXE : VIBRATIONS FORCÉES D'UN SYSTÈME DE N PENDULES COUPLÉS.
APPROXIMATION CONTINUE. ÉQUATION DE KLEIN-GORDON. LOI DE DISPERSION. [2]**

**3.9.1. ÉQUATION DU MOUVEMENT VIBRATOIRE D'UN SYSTÈME DE N PENDULES COUPLÉS
DANS L'APPROXIMATION CONTINUE**

Considérons le comportement d'un système constitué d'un grand nombre de pendules identiques couplés, excité sur l'un des oscillateurs à une pulsation ω quelconque [Crawford, ³ p131]. Le comportement de nombreux systèmes est identique à celui de l'exemple considéré ici. Nous décrivons le mouvement en partant d'un pendule non lié à la force d'excitation afin d'obtenir une solution générale non liée aux conditions aux limites. D'autre part, nous négligerons l'amortissement, tout en supposant que l'amortissement existe afin qu'un régime permanent puisse apparaître. Il en résultera la limitation suivante : la solution proposée ne sera correcte que loin des résonances.

⁴Faisons l'analyse du système considéré en décrivant le mouvement de 3 pendules voisins (figure ci-après). Faisons également l'hypothèse de mouvements de faibles amplitudes.

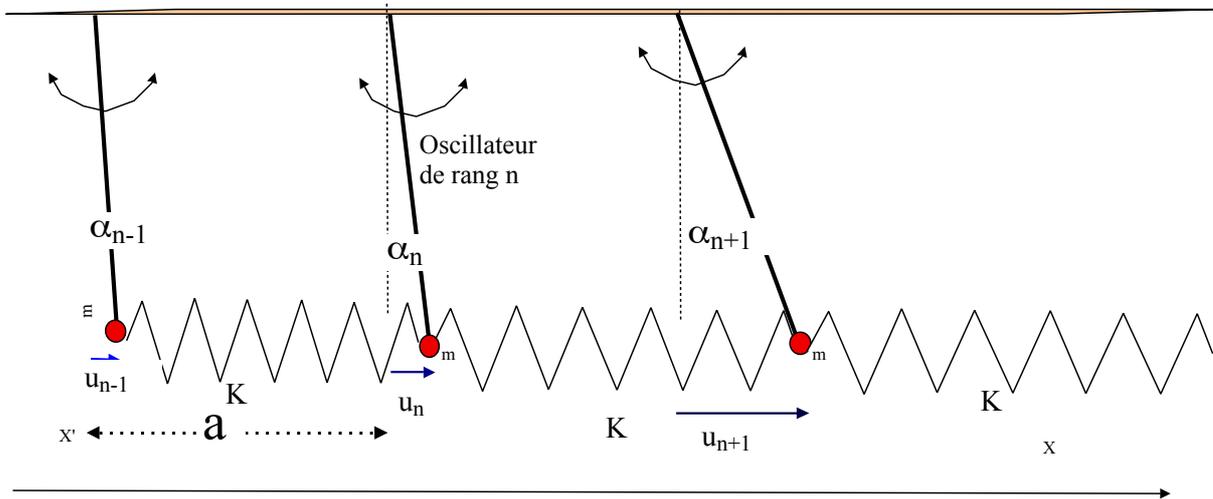


Fig. 4-16 : Positions de 3 pendules voisins dans un système constitué d'un grand nombre de pendules (masse m au bout d'une tige de longueur l) couplés de façon identique par des ressorts de raideur K .

On suppose que les positions d'équilibre des pendules correspondent à la verticale. Soit $\alpha_n(t)$ l'écart angulaire du pendule de rang n à un instant t et $u_n(t)$ le déplacement longitudinal correspondant de la masse de rang n .

Appliquons le théorème du moment cinétique au pendule de rang n . Les forces à prendre en considération sont :

- la composante horizontale du poids ($-mg \sin \alpha_n$) qui tend à ramener la tige à la verticale ;
- les forces de rappel des ressorts (qu'on prendra horizontales dans l'approximation des petites oscillations) $- [K(u_n - u_{n-1})]$ et $- [K(u_n - u_{n+1})]$.

³ Crawford F. S., 'Ondes', Berkeley, cours de physique, volume 3, Lib. A. Colin, 1972

⁴ ONDES. Volume 3, Berkeley : cours de physique. Frank-S Crawford, Éditeur : Armand Colin Collection : U ISBN : 2-200-21005-1, (1993)

Les moments de ces forces pour la rotation du pendule sont :

$(-mg \sin \alpha_n) \cdot l$ pour le poids et
 $- [K(u_n - u_{n-1})] \cdot \cos \alpha_n \cdot l$ et $- [K(u_n - u_{n+1})] \cdot \cos \alpha_n \cdot l$ pour les forces élastiques. Le théorème du moment cinétique s'écrit donc :

$$J \frac{d^2 \alpha_n}{dt^2} = -[mg \sin \alpha_n] \cdot l - K (u_n - u_{n-1}) l \cos \alpha_n - K(u_n - u_{n+1}) l \cos \alpha_n$$

En tenant compte des expressions et approximations suivantes $J = ml^2$, $\sin(\alpha_n) \approx \frac{u_n}{l}$,

$$\cos(\alpha_n) \approx 1, u_n \approx l \alpha_n \text{ soit } \frac{d^2 u_n}{dt^2} = l \frac{d^2 \alpha_n}{dt^2}$$

et en posant $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ on obtient :

$$\frac{d^2 u_n}{dt^2} = -\omega_0^2 u_n - \frac{K}{m} (u_n - u_{n-1}) + \frac{K}{m} (u_{n+1} - u_n)$$

Cherchons une solution dans l'**approximation continue**. En faisant cela, nous nous limitons à la description des configurations correspondant aux modes les plus bas (correspondant aux fréquences basses). Nous supposons donc que $u(t)$ est une fonction continue variant lentement avec l'augmentation de n . Cela signifie que les pendules voisins du pendule de rang n subissent pratiquement le même mouvement que le pendule considéré. Les déplacements des différents pendules sont donc décrits par une fonction $u(x, t)$. Afin d'obtenir une équation différentielle pour $u(x, t)$ passons par un développement en série de Taylor :

$$u_n(t) = u(x, t)$$

$$u_{n+1}(t) = u(x+a, t) =$$

$$u(x, t) + a \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{2} a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \dots$$

$$u_{n-1}(t) = u(x-a, t) = u(x, t) - a \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{2} a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \dots$$

On en déduit les expressions de $u_{n+1}(t) - u_n(t)$ et $u_n(t) - u_{n-1}(t)$; après remplacement on obtient l'équation suivante appelée équation d'onde de Klein-Gordon :

$$\boxed{\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = -\omega_0^2 u(x, t) + \frac{Ka^2}{m} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}}$$

Considérons le cas particulier pour lequel tous les pendules oscillent en régime permanent, et donc à la pulsation d'excitation ω et en phase. Nous ne précisons pas à ce niveau l'endroit où s'exerce l'excitation. La solution a alors la forme suivante :

$$(4.52) \quad u(x, t) = \cos(\omega t + \varphi) A(x) ;$$

φ représente un déphasage par rapport à l'excitation, $A(x)$ correspond à l'amplitude d'oscillation pour la position x . Dérivons par rapport à t et x : $\omega(k) \omega_n$

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = -\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) A(x)$$

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \cos(\omega t + \varphi) \frac{d^2 A(x)}{dx^2} .$$

Après remplacement, on obtient une équation qui donne la répartition spatiale des amplitudes d'oscillation des pendules lorsque le système excité à une pulsation ω , se trouve en régime permanent, soit :

$$(4.53) \quad \boxed{\frac{d^2 A(x)}{dx^2} + \frac{m}{Ka^2} (\omega^2 - \omega_0^2) A(x) = 0}$$

Le terme **d'onde** est utilisé ici pour décrire les répartitions spatiales des amplitudes d'oscillations des oscillateurs du système considéré, fournies par l'équation ci-dessus.

Les deux cas suivants se présentent $\omega^2 > \omega_0^2$ et $\omega^2 < \omega_0^2$.

3.9.2. ONDES SINUSOÏDALES.

3.9.2.1. Relation de dispersion des ondes sinusoïdales

Dans le cas $\omega^2 > \omega_0^2$ où l'équation (1) prend la forme :

$$(4.54) \quad \frac{d^2 A(x)}{dx^2} + k^2 A(x) = 0 \text{ avec}$$

$$(4.55) \quad k^2 = (\omega^2 - \omega_0^2) \frac{m}{Ka^2}$$

La solution générale est de la forme :

$$(4.56) \quad A(x) = A \sin(kx) + B \cos(kx),$$

A et B étant des constantes définies par les conditions aux limites.

Reprenons les conditions d'excitation utilisées dans le cas de la chaîne d'oscillateurs K-m étudié au début du chapitre. Le premier oscillateur recevant une excitation $u_0(t) = A \cos(\omega t)$, les oscillateurs suivants vont reproduire le mouvement avec un retard dépendant de leurs positions. La solution pour l'oscillateur de rang n s'écrit alors :

$$u_n(t) = A e^{-jn\Phi} e^{j\omega t}$$

En introduisant le coefficient K, le déphasage unitaire, dû au retard du mouvement, on obtient :

$$u_n(t) = A \cos(\omega t - k x_n) = \cos(\omega t - k n a)$$

En remplaçant dans l'équation différentielle, on obtient :

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{2K}{m} (1 - \cos ka) \text{ ou}$$

$$(4.57) \quad \omega^2 = \omega_0^2 + \frac{4K}{m} \sin^2 \frac{ka}{2} \text{ ou encore :}$$

$$(4.58) \quad \omega(k) = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{4K}{m} \sin^2 \frac{ka}{2}}$$

La relation ci-dessus est appelée relation de dispersion ; son sens apparaît plus clairement dans l'étude de la propagation des ondes dans le système. La courbe $\omega(k)$, ou courbe de dispersion est montrée ci-après. On voit que cette courbe n'est pas linéaire ; il y aura des conséquences lorsque le système sera excité à plusieurs fréquences simultanément.

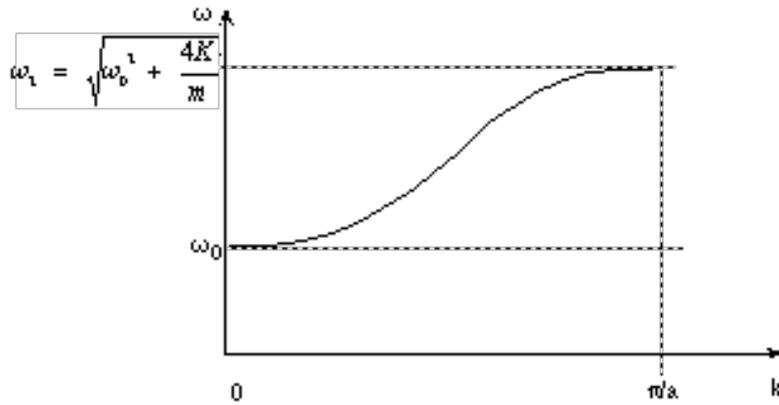


Fig. 4-17 : Courbe de dispersion d'un système de pendules couplés dans la zone dispersive.

La relation ci-dessus, correspondant au domaine dispersif, est valable pour ka compris en 0 et π , soient des pulsations comprises dans la plage :

$$(4.59) \quad \omega_1 = \omega_0 \quad \text{à} \quad \omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{4K}{m}} \quad \text{ou en fréquence de :}$$

$$(4.60) \quad f_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}} \quad \text{à} \quad f_2 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{4K}{m}}.$$

Le système étudié se comporte en **filtre passe-bande** puisque les oscillations se propagent que dans la bande de fréquences ci-dessus.

3.9.2.2. Vitesse de phase de l'onde sinusoïdale

Dans la zone dite dispersive, les vibrations imposées à un endroit de la chaîne, se propagent le long de celle-ci. La répartition d'amplitude à un moment donné est sinusoïdale. Cette distribution se déplace en restant identique à elle-même (figure).

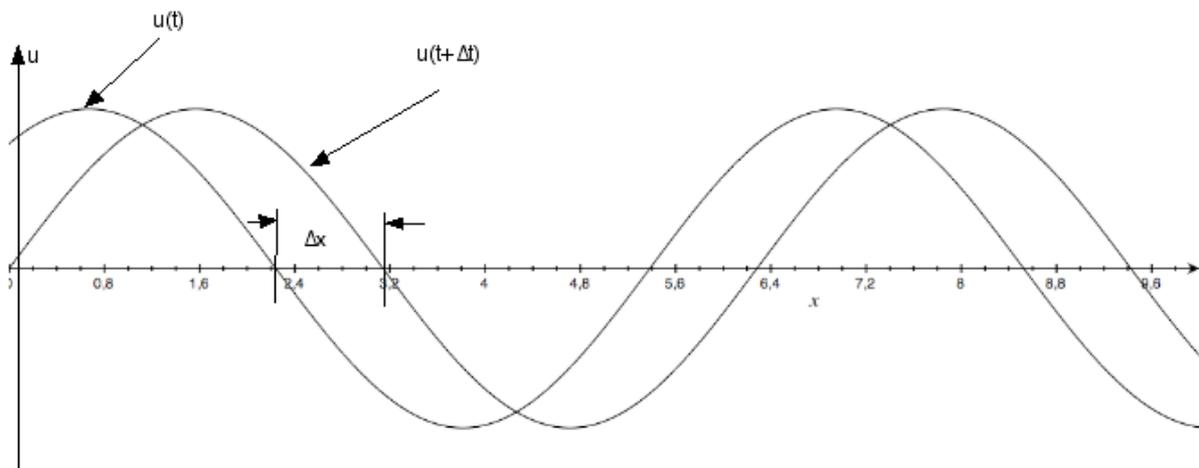


Fig. 4-18 : Déplacement de la répartition d'amplitude (ou 'onde') pendant un temps Δt . La notion de vitesse de déplacement peut être introduite.

La répartition de l'amplitude des oscillations étant donné par $u_n(t) = A \cos(\omega t - k x_n)$, on voit que pour se déplacer avec cette onde tout en gardant une phase constante, il faut se déplacer avec une célérité c telle que :

$$(4.61) \quad c = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\omega}{k}.$$

L'étude des phénomènes ondulatoires permet de déterminer la relation entre la célérité des ondes sinusoïdales et les paramètres du milieu traversé.

3.9.3. ONDES EXPONENTIELLES

3.9.3.1. Domaine réactif inférieur

Dans le cas où $\omega^2 < \omega_0^2$, une autre forme d'onde apparaît, les ondes exponentielles. En dessous de la pulsation de coupure ($\omega^2 < \omega_0^2$), le milieu est dit réactif et la relation de dispersion s'écrit, en introduisant le paramètre κ (kappa) :

$$(4.62) \quad \kappa^2 = (\omega_0^2 - \omega^2) \frac{m}{Ka^2}.$$

La nouvelle équation pour $A(x)$:

$$(4.63) \quad \frac{d^2 A(x)}{dx^2} - \kappa^2 A(x) = 0.$$

La présence du signe (-) dans le 2^{ème} terme de l'équation impose une solution d'un nouveau type :

$$(4.64) \quad A(x) = A \exp(-\kappa x) + B \exp(+\kappa x).$$

Le 2^{ème} terme en $\exp(+\kappa x)$ fait tendre $A(x)$ vers l'infini lorsqu'on avance le long de la chaîne ; une telle solution n'a pas de sens physique, on prendra donc $B=0$ et on ne retiendra que le 1^{er} terme.

Après différenciation et remplacement, on obtient l'expression générale des ondes exponentielles :

$$(4.65) \quad u(x, t) = [A \exp(-\kappa x)] \cos(\omega t + \varphi).$$

Si on suppose que le système est soumis à une excitation d'amplitude A_0 à $x=0$, l'amplitude des oscillateurs pour $x>0$ varie suivant :

$$(4.66) \quad A(x) = A_0 e^{-\kappa x}$$

Le remplacement dans l'équation différentielle de départ donne :

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{4K}{m} sh^2 \frac{\kappa a}{2}$$

La pulsation particulière $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ constitue une **pulsation inférieure de coupure** : lorsque le système est excité à une pulsation inférieure à ω_0 , une répartition sinusoïdale de $A(x)$, l'amplitude d'oscillation des pendules n'est pas possible. Le système d'oscillateurs étudié dans ce chapitre se comporte en filtre passe-haut. La représentation graphique est montrée ci-après.

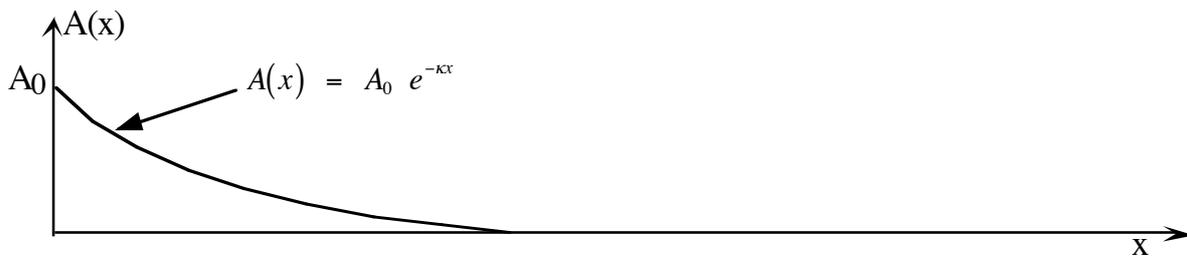


Fig. 4-19 : Variation spatiale de l'amplitude des oscillations dans un système de pendules couplés excités en dessous de la fréquence du mode fondamental à son origine $z=0$. Les pendules éloignés n'oscillent pas.

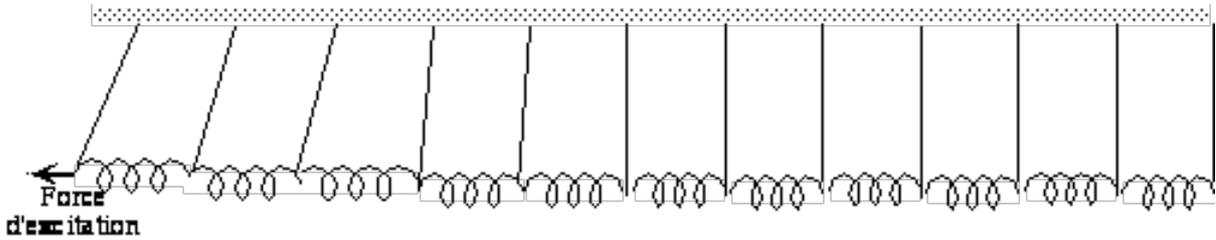


Fig. 4-20 : Position des pendules au maximum de déplacement.

La constante κ introduite ci-dessus caractérise la diminution d'amplitude observée entre le point d'application de la force d'excitation et l'intérieur du système. Il est parfois plus intéressant d'utiliser la grandeur δ , longueur d'amortissement définie comme :

$$(4.67) \quad \delta = \frac{1}{\kappa}$$

qui donne la profondeur de pénétration dans le système considéré, de la perturbation introduite par la force d'excitation. Il ne s'agit pas d'une atténuation due à des frottements (nous avons supposé qu'ils étaient négligeables) mais d'une diminution d'amplitude due à la nature réactive du milieu : l'énergie ne se propage pas mais est restituée à la source d'excitation.

La représentation graphique de la courbe de dispersion est donnée ci-après.

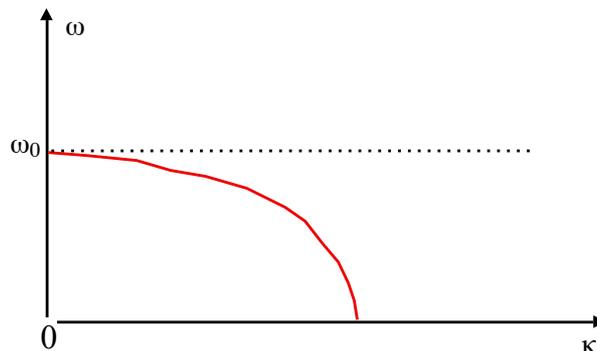


Fig. 4-21 : Courbe de dispersion d'un système de pendules couplés dans la zone réactive inférieure.

3.9.3.2. Domaine réactif supérieur

La solution correspondant au domaine réactif supérieur peut être trouvée de façon intuitive en prenant en considération à la fois l'allure en zigzag du mode le plus élevé du système de N pendules et la variation en exponentielle dans la zone réactive obtenue dans l'approximation continue. La solution cherchée s'écrit alors :

$$(4.68) \quad A_n = (-1)^n [A \exp(-\kappa na) + B \exp(\kappa na)].$$

En développant comme précédemment, nous obtenons alors la loi de dispersion pour la zone réactive supérieure, qui apparaît pour des pulsations d'excitation supérieure à $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{4K}{m}}$:

$$(4.69) \quad \omega^2 = \omega_0^2 + \frac{4K}{m} ch^2 \frac{\kappa a}{2}$$

L'allure de la courbe est montrée ci-après.

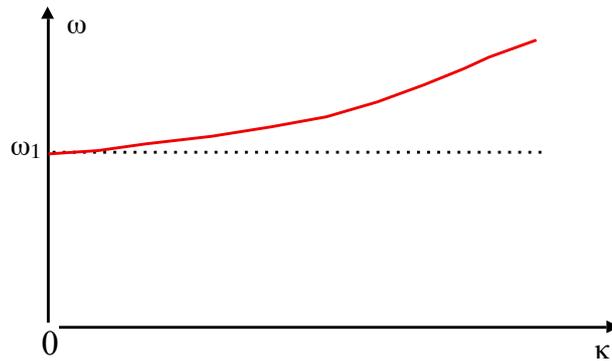


Fig. 4-22 : Courbe de dispersion d'un système de pendules couplés dans la zone réactive supérieure.

Les relations de dispersion obtenues pour le régime d'oscillations forcées en régime permanent sont également valables pour les oscillations libres.

Rappelons que nous avons utilisé l'approximation continue ; cela signifie que les résultats trouvés s'appliquent aux pulsations basses et non aux pulsations élevées pour lesquelles l'approximation continue n'est pas valable.

3.9.4. MILIEU INHOMOGÈNE : NOTION DE FILTRAGE

Considérons maintenant un système de pendules constitué de deux types de pendules (figure ci-après).

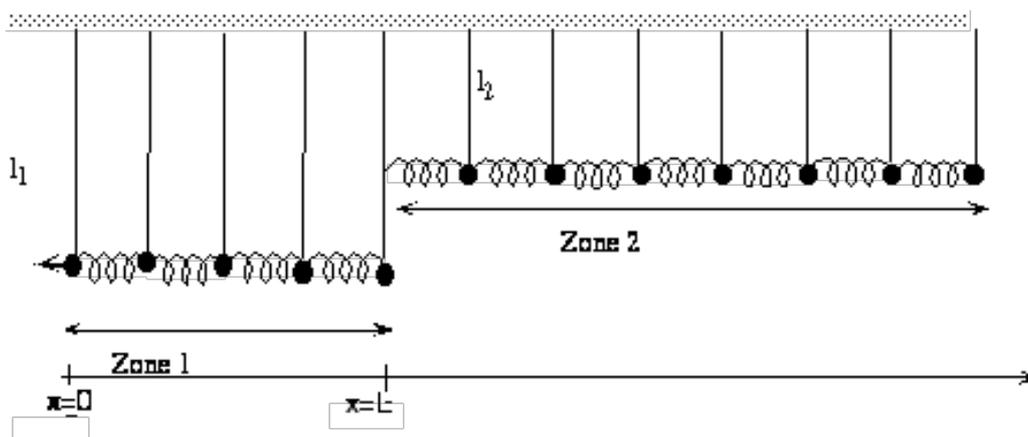


Fig. 4-23 : Système présentant deux types de pendules. La fréquence de coupure n'est pas la même dans les deux zones.

Le milieu est constitué de deux zones dans lesquelles les pulsations de coupure basse (fréquence du mode fondamental) sont respectivement $\omega_{0,1} = \sqrt{\frac{g}{l_1}}$ et $\omega_{0,2} = \sqrt{\frac{g}{l_2}}$.

Supposons qu'à $x = 0$, au début de la zone, le premier pendule soit excité par une force sinusoïdale à la pulsation ω telle que $\omega_{0,1} < \omega < \omega_{0,2}$. Dans ce cas, la zone 1 se comporte comme un milieu dispersif alors que la zone 2 se comporte en zone réactive. Trouvons la répartition $A(x)$ de l'amplitude d'oscillation dans le cas où la force d'excitation provoque une oscillation d'amplitude

$$u(0, t) = A_0 \cos(\omega t)$$

pour le premier pendule. Les autres pendules oscillent suivant l'expression suivante :

$$u(x, t) = A(x) \cos(\omega t).$$

Dans la zone 1 s'étendant de $x=0$ à $x=L$ (dispersive), on peut prendre $A(x)$ sous la forme :

$$(4.70) \quad A_1 = A \sin[k(x - L)] + B \cos[k(x - L)]$$

où on a pris $x - L$, au lieu de x , pour une meilleure cohérence du résultat final.

Dans la zone 2 (réactive), $A(x)$ est donné par :

$$A_2 = C e^{-\kappa(x-L)} .$$

Il faut ajouter à ces deux expressions les conditions aux limites :

$$A_1(x=0) = A_0 \text{ et } A_1(L) = A_2(L) .$$

Il en résulte :

$$(4.71) \quad B = C \text{ et } C = \frac{A_0}{\frac{\kappa}{k} \sin kL + \cos kL}$$

Les valeurs de kL pour lesquelles le dénominateur de l'expression de la constante C s'annule, correspondent aux résonances. La représentation graphique de $A(x)$ pour une pulsation d'excitation proche de la fréquence fondamentale, est donnée ci-après.

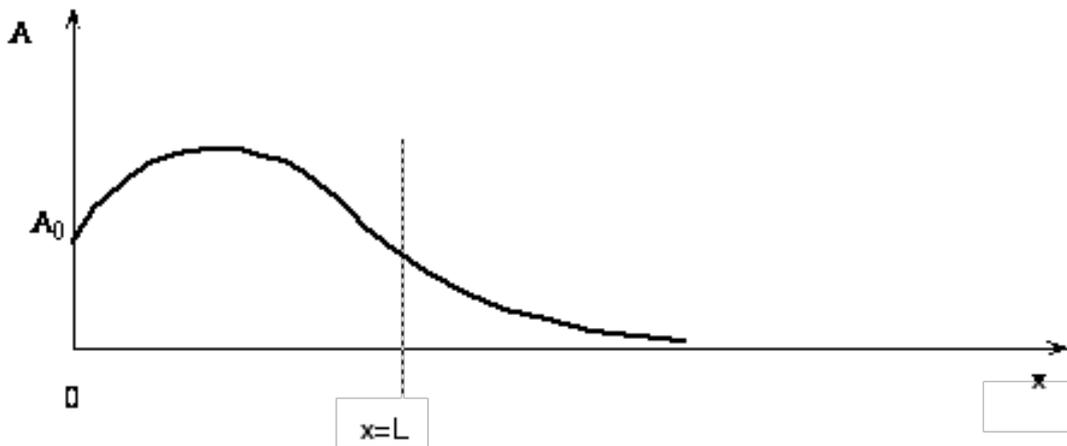


Fig. 4-24 : Variation de l'amplitude d'oscillation dans un système de pendules constitué de deux zones, excité à une fréquence pour laquelle la première zone est dispersive et la deuxième, réactive.

Le système décrit ci-dessus se comporte comme un filtre pour les pulsations d'excitation inférieures à $\sqrt{\frac{g}{l_2}}$: le mouvement d'oscillation reste confiné à la première zone, dispersive de la structure.

3.9.5. NOTION DE MODES LIÉS

Que se passe-t-il si le milieu présente 3 zones et que l'excitation se fait à une pulsation pour laquelle la zone intermédiaire est dispersive et les deux zones périphériques, réactives ? Un tel milieu réalisé à l'aide de pendules est dessiné ci-après.

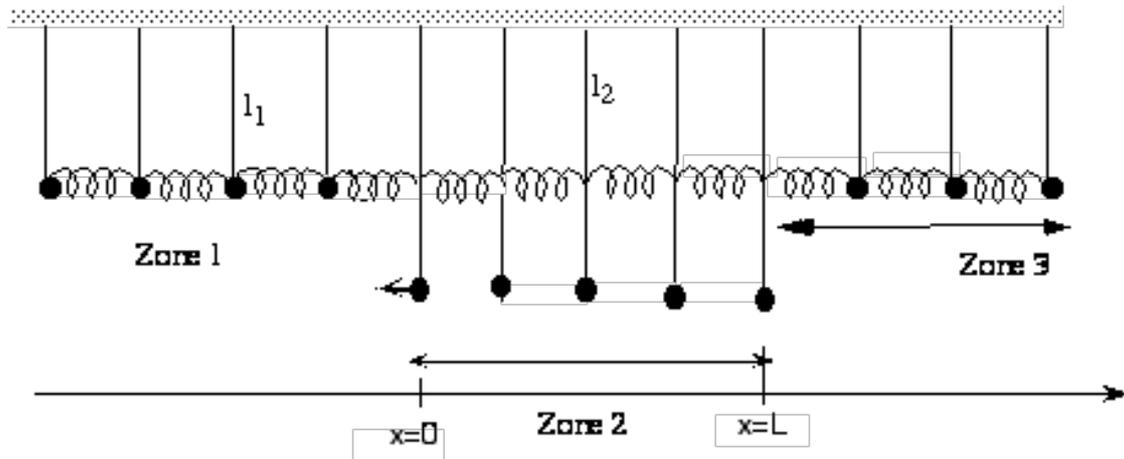


Fig. 4-25 : Dans le système présenté, la zone du milieu (notée 2) présente une fréquence fondamentale inférieure à celle des deux zones adjacentes.

Dans le système ci-dessus, une excitation harmonique à une pulsation $\omega_{0,1} < \omega < \omega_{0,2}$ appliquée à l'un des pendules de la zone 2 introduira une onde sinusoïdale dans cette zone ; cette onde se prolongera dans les zones 1 et 3 par des ondes exponentielles comme représenté ci-après. Les modes d'oscillation correspondant sont dits **modes liés** car leur existence est limitée à une zone du milieu. Le nombre de modes liés est limité, car pour $\omega^2 > \omega_{0,1,3}^2 = \frac{g}{l_2}$, les zones 1 et 2 redeviennent dispersives et l'onde s'étend alors à l'infini.

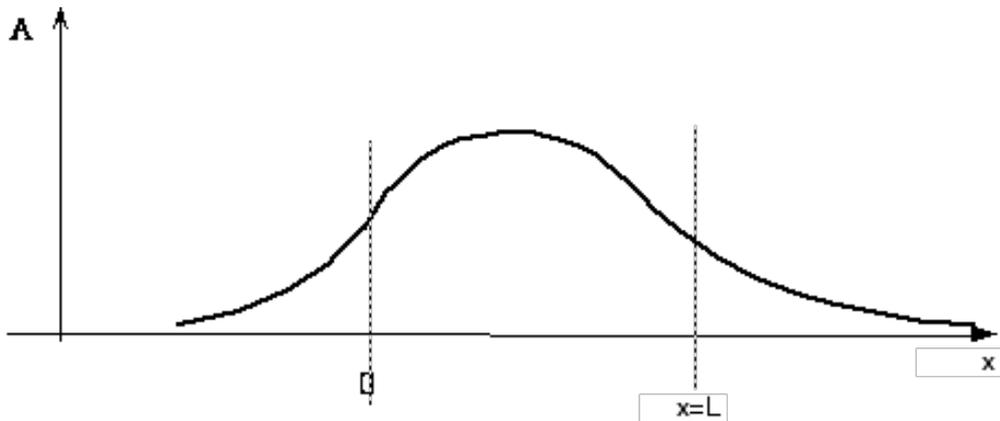


Fig. 4-26 : Variation de l'amplitude d'oscillation dans un système de pendules présentant une zone dispersive entourée de deux zones réactives.

Le comportement décrit ici est observé dans de nombreuses autres structures, par exemple dans un guide électrique ou une fibre optique où la notion de mode est très utile ou encore dans les atomes où le mouvement des électrons est décrit sous la forme d'ondes appelées ondes de De Broglie.

3.10. EXEMPLES D'OSCILLATEURS À UN GRAND NOMBRE DE DEGRÉS DE LIBERTÉ

3.10.1. INSTRUMENT DE MUSIQUE

Peut être (très bien) pratiqué sans connaissance de la physique

3.10.2. LE LASER

Voir le cours « Photonique : Lasers et Applications. Cours à l'usage de l'ingénieur » - J. Fontaine. et bien d'autres références