

2. VIBRATIONS des SYSTÈMES A PLUSIEURS DEGRÉS DE LIBERTÉ.

2.1. OSCILLATEURS MÉCANIQUES À 2 DEGRÉS DE LIBERTÉ (OU OSCILLATEURS COUPLÉS).

2.1.1. DÉFINITION

Un système en oscillation est à deux degrés de liberté (ddl) si deux paramètres sont nécessaires et suffisants pour décrire son mouvement. Le système est **linéaire et couplé** si les deux paramètres et leurs dérivées apparaissent au premier degré et simultanément dans les deux équations différentielles du mouvement.

2.1.2. EXEMPLES DE SYSTÈMES À 2 DDL

La figure ci-dessous montre quelques exemples d'oscillateurs couplés à deux DDL. Le couplage dans les systèmes mécaniques est assuré par inertie (a) ou par élasticité (b, c). Dans les systèmes électriques, on trouve les circuits couplés par capacité, ce qui est équivalent au couplage par élasticité, et les circuits couplés par inductance, équivalents au couplage par inertie. Le couplage électrique le plus utilisé est obtenu à l'aide d'une inductance mutuelle (e). Ce type de couplage n'a pas d'équivalent mécanique, mais se prête à la même description que les oscillateurs mécaniques.

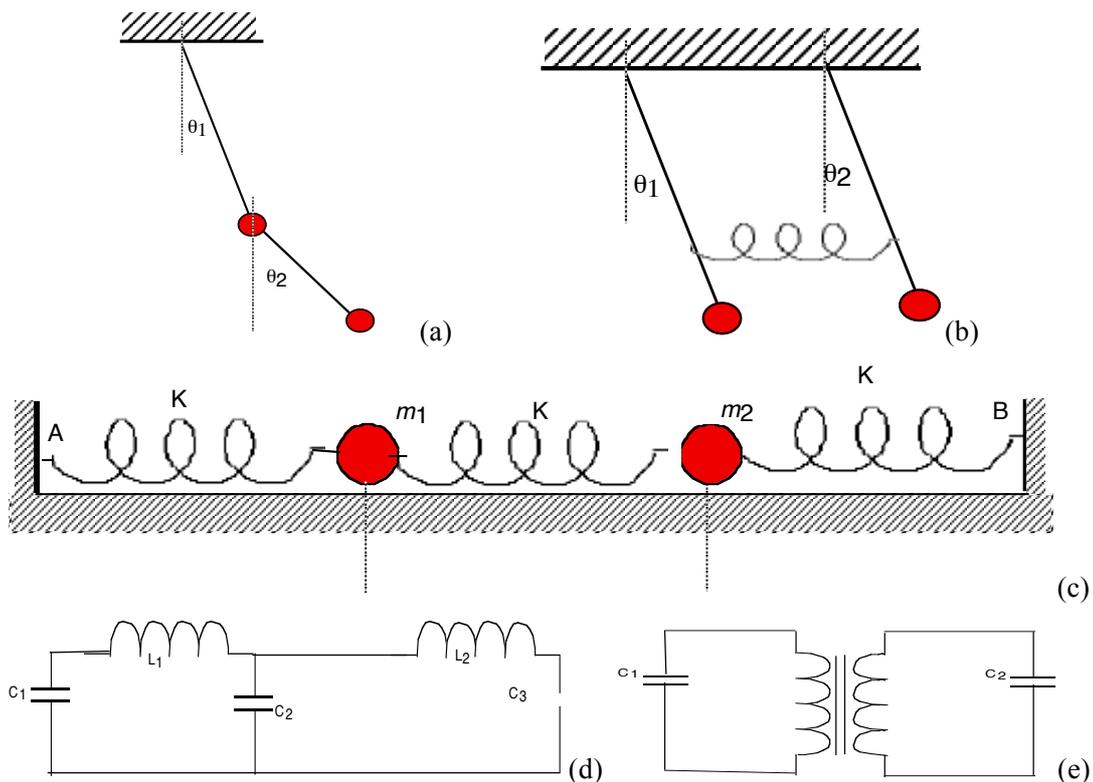


Fig. 3-1 : Exemples de systèmes à 2 DDL

(a) Pendule double ; (b) pendules couplés par un ressort ; (c) 2 masses reliées à 2 supports par 3 ressorts. ; (d) circuits LC couplés ; (e) oscillateurs électriques couplés par inductance mutuelle.

2.1.3. OSCILLATIONS LIBRES D'UN SYSTÈME DE 2 OSCILLATEURS MÉCANIQUES COUPLÉS NON AMORTIS

3.1.3.1. Coordonnées normales

Considérons une système constitué de 2 oscillateurs m-K, (O_1) et (O_2) ayant chacun 1 degré de liberté en translation horizontale (fig. – 3.2a). Leurs oscillations respectives dans un repère galiléen s'expriment par les écarts $s_1(t)$ et $s_2(t)$ par rapport à leurs positions de repos X_{10} et X_{20} .

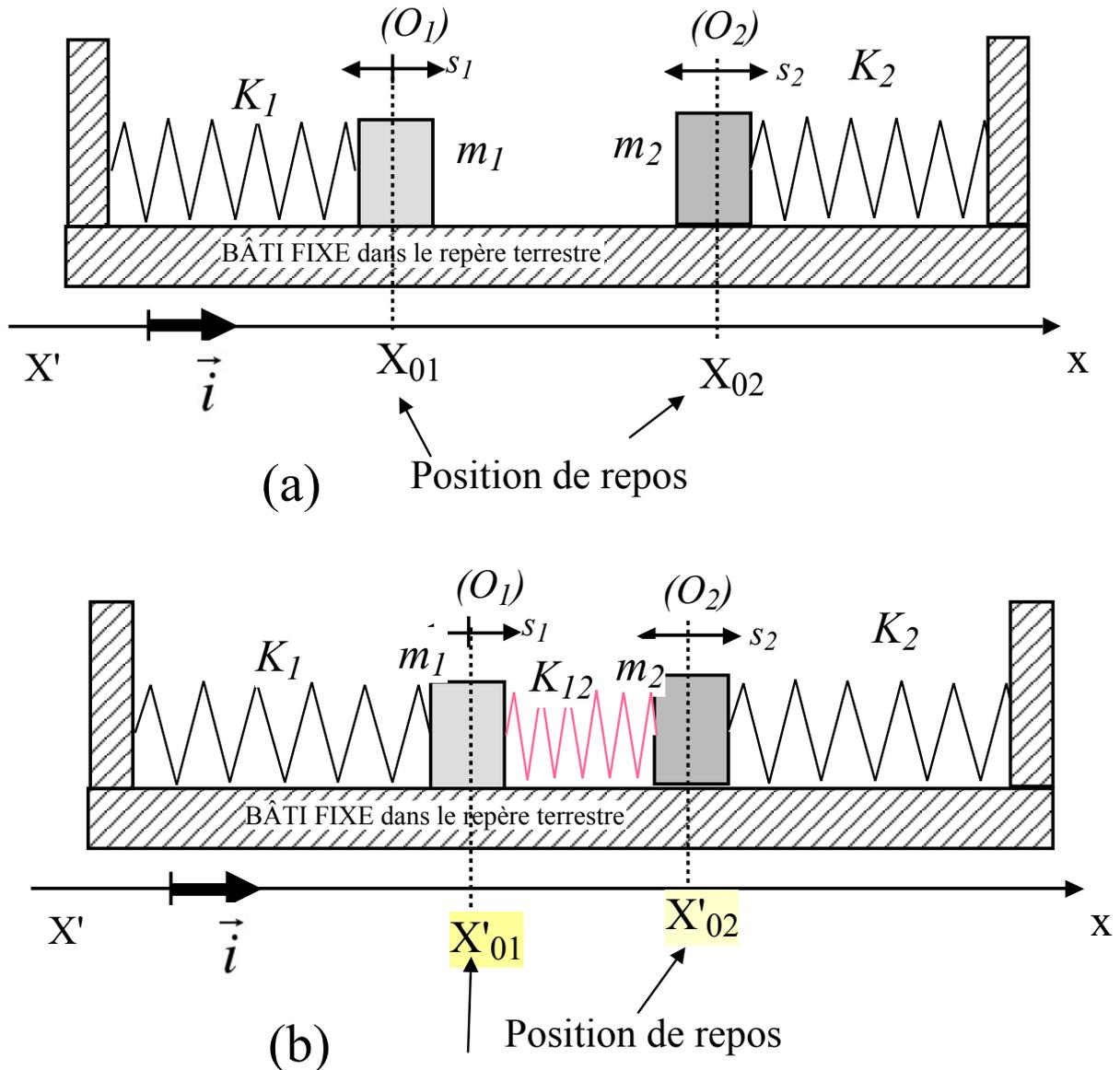


Fig. 3-2 : Système de 2 oscillateurs m-K. (a) oscillateurs découplés. (b) oscillateurs couplés. Le couplage modifie les positions de repos.

On réalise un système couplé à 2 degrés de liberté en reliant les masses par un troisième ressort de raideur K_{12} ; l'introduction du ressort de couplage, dans un cas général, modifie la position de repos de (O_1) et (O_2) (fig. 3.2b). La description des mouvements d'oscillation est facilitée par l'utilisation des **coordonnées normales** : les positions des masses sont définies comme l'écart par rapport aux positions de repos X'_{10} et X'_{20} .

3.1.3.2. Les modes propres de vibration

Les oscillations dans un système à 2 (ou plusieurs) degrés de liberté dépendent des conditions initiales. On distingue deux cas :

- celui des oscillations libres : un déséquilibre (apport d'énergie) est introduit brièvement puis le système évolue librement ;
- celui de oscillations forcées : l'un des oscillateurs est excité de façon permanente. Cette situation est particulièrement intéressante, car elle mène parfois au phénomène de résonance qui se traduit par une accumulation d'énergie qui peut entraîner la destruction du système.

Dans le cas des oscillations libres, des situations particulières existent et sont décrites ci-après, ce sont les **modes propres** (ou **modes normaux**) d'oscillations dont les caractéristiques sont les suivantes :

- tous les constituants du système oscillent à la même fréquence,
- deux oscillateurs quelconques du système oscillent, soit en phase, soit en opposition de phase, ce qui signifie qu'ils passent tous simultanément par la position d'équilibre.
- les amplitudes relatives des différents oscillateurs sont parfaitement définies et liées au mode propre considéré.

Un mode propre est donc caractérisé par une pulsation particulière (**fréquence propre**); il y a autant de modes avec leurs pulsations associées qu'il y a de degrés de liberté dans le système. L'analyse du comportement dynamique du système permet de déterminer les fréquences propres et la répartition d'amplitude associés à chaque mode.

Dans le cas du système m-K considéré ci-dessus les modes propres sont faciles à deviner si le système est symétrique ($m_1=m_2$ et $K_1=K_2$) (on néglige les pertes pour la discussion).

1^{er} mode : On l'obtient en prenant comme condition initiale un même écart pour (O_1) et (O_2) (fig ci-après)

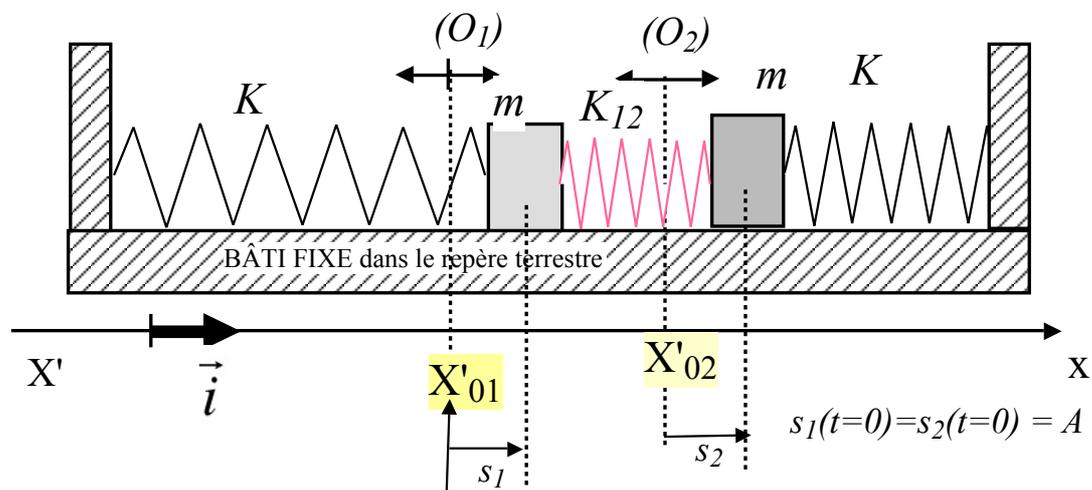


Fig. 3-3 : Système couplé symétrique : conditions initiales pour exciter le 1^{er} mode propre.

A $t=0$, les 2 oscillateurs sont libérés à partir d'un même écart par rapport à la position d'équilibre, et sans vitesse initiale. On observe que le système oscille à la fréquence propre des oscillateurs sans couplage, soit $f_{p1} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{K/m}$.

Un état quelconque du système à partir de $t=0$ est décrit par les expressions :

$$s_1(t) = s_2(t) = A \cos(\omega_{p1} t) .$$

2^{ème} mode : Pour l'obtenir il suffit de partir à l'instant initial, d'un écart symétrique des 2 oscillateurs et libérer.

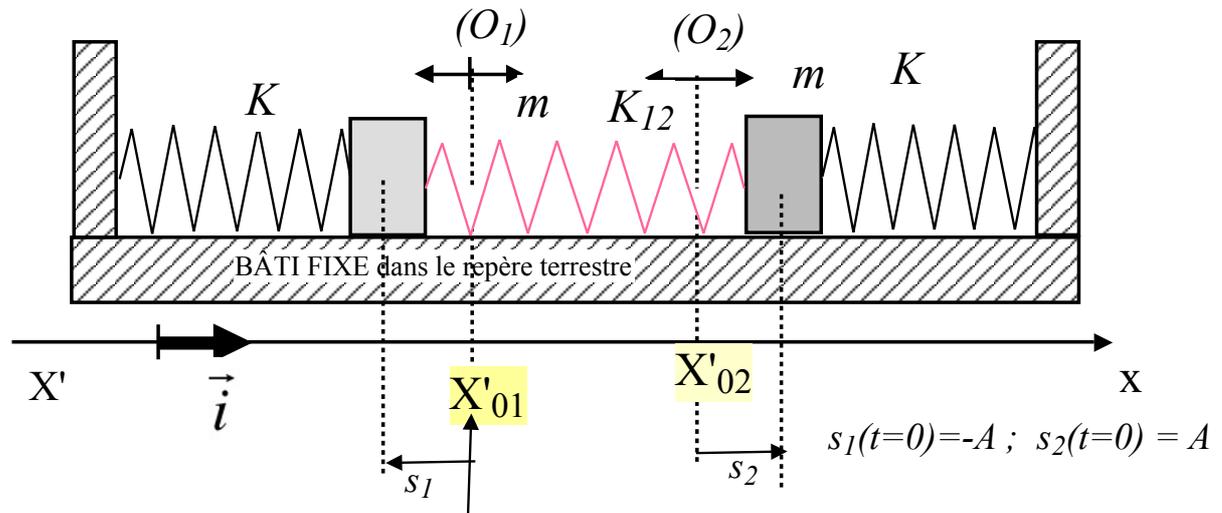


Fig. 3-4 : Système couplé symétrique : conditions initiales pour exciter le 2^{er} mode propre (ou mode symétrique)..

Le système oscillera dans une configuration symétrique. Le point central du ressort de couplage reste immobile, et le système est équivalent au système montré ci-après : chaque masse est ramenée vers la position d'équilibre par deux ressorts, l'un de raideur K et l'autre de raideur $2K_{12}$. On peut alors facilement montrer, sans faire d'analyse dynamique que la fréquence propre d'oscillation est égale à :

$$f_{p2} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{(K + 2K_{12})}{m}}$$

Le régime libre est défini par les expressions suivantes :

$$s_1(t) = A \cos(\omega_{p2} t - \pi) \quad \text{et} \quad s_2(t) = A \cos(\omega_{p2} t)$$

Remarques :

→ Lorsque le système oscille sur un mode propre, les oscillateurs n'échangent pas d'énergie. Dans tous les autres cas, il y a échange d'énergie entre les oscillateurs.

→ L'oscillation dans un régime libre lié à des conditions initiales quelconques, est le résultat de la superposition des modes propres avec des amplitudes et phases fixées par les conditions de départ.

→ La visualisation des modes propres pour le système symétrique ci-dessus est assez intuitive. Ce n'est pas le cas pour un système constitué de deux oscillateurs différents ; ces modes existent néanmoins et peuvent être déterminés par le calcul.

3.1.3.3. Méthode générale de résolution des équations de mouvement en régime libre.

Pour un système mécanique, la mise en équation du système couplé passe par la mise en application du principe fondamentale de la dynamique pour chaque sous-système. La méthode à suivre est la suivante :

- 1 - On écrit les 2 équations différentielles pour les paramètres normaux s_1 et s_2 .
- 2 - On fait l'hypothèse que le système admet des solutions harmoniques,

$$(3.1) \quad s_1(t) = A_1 \cos(\omega_{pr} t + \varphi_1) \quad \text{et} \quad s_2(t) = A_2 \cos(\omega_{pr} t + \varphi_2)$$

ce qui signifie que le système peut osciller avec la même pulsation pour tous les oscillateurs. En passant par la représentation complexe, on obtient un système algébrique, linéaire et homogène.

3 – La résolution des systèmes d'équations permet d'obtenir 2 pulsations particulières $\omega_{pr,1}$ et $\omega_{pr,2}$; ce sont les pulsations propres (l'équivalent du ω_0 ou ω_p pour l'oscillateur libre).

4 - On substitue ensuite $\omega_{pr,1}$ dans l'une des 2 équations et l'on obtient le rapport d'amplitude $\frac{A_2}{A_1}$ pour le 1^{er} mode propre.

5 - On substitue ensuite $\omega_{pr,2}$ dans une équation du système de départ et l'on obtient $\frac{A_2}{A_1}$ pour le deuxième mode propre.

3.1.3.4. Détermination des fréquences propres du système sans pertes

Pour trouver les fréquences propres du système couplé à 2ddl, il faut commencer par en faire l'étude dynamique. Soit le système m-K couplé quelconque ci-après.

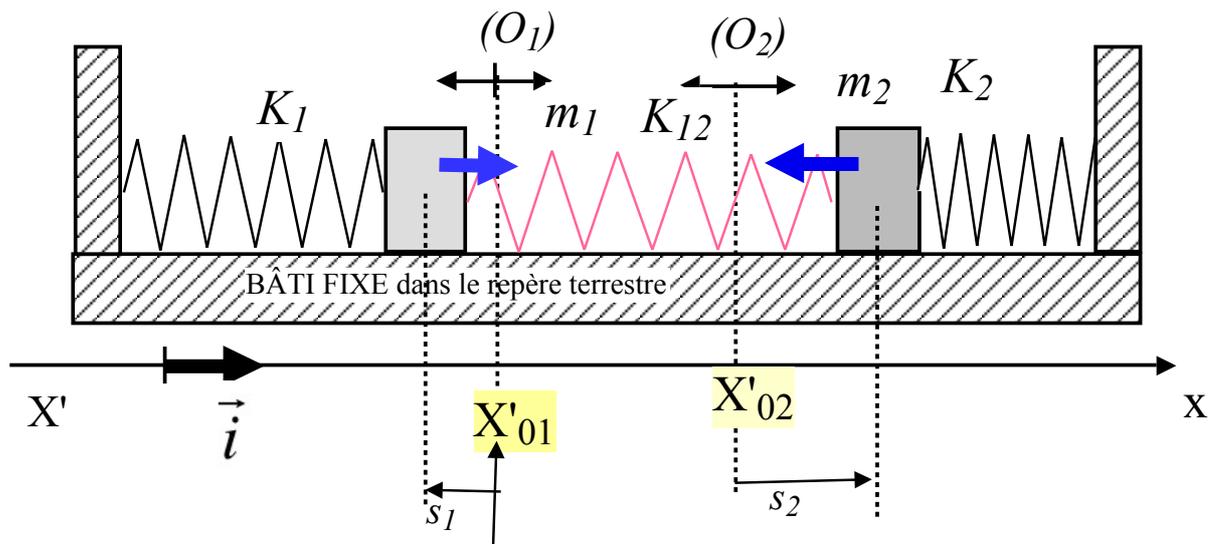


Fig. 3-5 : système couplé à 2 ddl en régime libre

Négligeons les termes de frottement et faisons le bilan des forces.

Pour l'oscillateur (O_1) :

Force de rappel du ressort 1 + Force de rappel du ressort de couplage + Force d'inertie = 0

Soit : $-K_1 s_1 - K_{12}(s_1 - s_2) - m_1 \gamma_1 = 0$ avec $\gamma_1 = \frac{d^2 s_1}{dt^2}$ l'accélération ;

($s_1 - s_2$ correspond à la variation de longueur du ressort de couplage à un instant donné par rapport à sa longueur dans la situation d'équilibre, soit $X'_{02} - X'_{01}$.

De même pour l'oscillateur (O_2) on a à un instant quelconque :

$$-K_2 s_2 - K_{12}(s_2 - s_1) - m_2 \gamma_2 = 0.$$

Le système est donc décrit par les deux équations couplées ci-après :

$$(3.2) \left\{ \begin{array}{l} m_1 \frac{d^2 s_1}{dt^2} + (K_1 + K_{12})s_1 - K_{12} s_2 = 0 \\ m_2 \frac{d^2 s_2}{dt^2} + (K_2 + K_{12})s_2 - K_{12} s_1 = 0 \end{array} \right\}.$$

Les équations différentielles peuvent se mettre sous la forme :

$$(3.3) \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 s_1}{dt^2} + a_1 s_1 - b_1 s_2 = 0 \\ \frac{d^2 s_2}{dt^2} + a_2 s_2 - b_2 s_1 = 0 \end{array} \right.$$

$$\text{avec } a_1 = \frac{K_1 + K_{12}}{m_1} ; b_1 = \frac{K_{12}}{m_1} (< a_1) ; a_2 = \frac{K_2 + K_{12}}{m_2} ; b_2 = \frac{K_{12}}{m_2} (< a_2).$$

- La solution générale de ce système différentiel est la somme de 2 solutions particulières.
- Les solutions particulières correspondent aux modes propres. Ce sont 2 paires de solutions sinusoidales qui s'écrivent : $s_1(t) = A_1 \cos(\omega_{pr} t + \varphi_1)$ et $s_2(t) = A_2 \cos(\omega_{pr} t + \varphi_2)$ avec ω_{pr} la pulsation propre qui peut prendre autant de valeurs qu'il y a de paramètres (ici 2).
- Il existe pour chaque pulsation propre $\omega_{pr.1} = \omega_1$ et $\omega_{pr.2} = \omega_2$ un groupe de constantes A_1, A_2, φ_1 et φ_2 fixées par les conditions initiales.

En complexe la solution s'écrit :

$$(3.4). \widetilde{s_{1,2}}(t) = \widetilde{A_{1,2}} e^{j\omega_{pr} t}$$

En remplaçant la solution ci-dessus dans l'équation (3.8) on obtient (les grandeurs complexes sont notées \widetilde{A} ou \overline{A} . On utilise aussi \underline{A}):

$$(3.5) \left\{ \begin{array}{l} (a_1 - \omega_{pr}^2) \overline{A_1} - b_1 \overline{A_2} = 0 \\ -b_2 \overline{A_1} + (a_2 - \omega_{pr}^2) \overline{A_2} = 0 \end{array} \right.$$

Ce système peut être écrit sous la forme suivante :

$$(3.6) \begin{bmatrix} (a_1 - \omega_{pr}^2) & -b_1 \\ -b_2 & (a_2 - \omega_{pr}^2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \overline{A_1} \\ \overline{A_2} \end{bmatrix} = 0$$

Ce système dit de Cramer admet des solutions différentes de la solution triviale ($\overline{I_1} = \overline{I_2} = 0$) si le déterminant est nul, ce qui donne l'équation aux valeurs propres suivante :

$$(3.7) (a_1 - \omega^2)(a_2 - \omega^2) - b_1 b_2 = 0 \quad \text{soit encore :}$$

$$(3.8) (\omega^2)^2 - (a_1 + a_2)\omega^2 + (a_1a_2 - b_1b_2) = 0$$

On peut vérifier que le discriminant $\Delta = (a_1 + a_2)^2 - 4(a_1a_2 - b_1b_2)$

de cette équation du second degré en ω^2 est toujours positif ; il y a donc toujours 2 racines positives

$$(3.9) \omega_{pr.1} = \omega_1 = \sqrt{\frac{(a_1 + a_2) - \sqrt{\Delta}}{2}} \quad \text{et} \quad \omega_{pr.2} = \omega_2 = \sqrt{\frac{(a_1 + a_2) + \sqrt{\Delta}}{2}}.$$

Ces pulsations propres correspondent chacune à un mode propre d'oscillation.

Pour des conditions initiales particulières, le système oscille de manière purement sinusoïdale suivant les modes propres associés aux pulsations propres $\omega_{pr.1}$ et $\omega_{pr.2}$.

Amplitudes :

Les équations (3.10) permettent d'écrire une relation entre les amplitudes des oscillateurs pour chaque mode propre :

$$(3.10) \quad \frac{\overline{A_2}}{A_1} = \frac{a_1 - \omega_{pr.1}^2}{b_1} = \frac{b_2}{a_2 - \omega_{pr.1}^2} = \alpha_1 \quad \text{pour le mode (1) et}$$

$$(3.11) \quad \frac{\overline{A_2}}{A_1} = \frac{a_1 - \omega_{pr.2}^2}{b_1} = \frac{b_2}{a_2 - \omega_{pr.2}^2} = \alpha_2 \quad \text{pour le mode (2).}$$

Un signe + pour le rapport $\frac{\overline{A_2}}{A_1}$ signifie que les oscillateurs en en phase, un signe – signifie qu'ils sont en opposition de phase. Si on suppose $\omega_1 < \omega_2$, pour $\omega = \omega_1$, les 2 oscillateurs oscillent en phase ; pour $\omega = \omega_2$ les oscillateurs oscillent en opposition de phase. Les amplitudes dépendent des paramètres K et m.

Cas particulier 1 (cas du système symétrique) : Les masses et les ressorts sont identiques $K_1 = K_2 = K_{12} = K$ et $m_1 = m_2 = m$.

Les pulsations propres sont alors :

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{K}{m}} \quad \text{et} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{3K}{m}} \quad \text{ou} \quad \text{pour les fréquences} \quad f_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{m}} \quad \text{et}$$

$$f_2 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3K}{m}} = \sqrt{3} f_1.$$

1^{er} mode propre (fréquence $f_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{m}}$) :

En remplaçant ω_{pr} par $\omega_1 = \sqrt{\frac{K}{m}}$ dans l'équation 3.3.a, on obtient l'amplitude du 1^{er} mode propre : $K x_1 - K x_2 = 0$. Les amplitudes sont donc identiques : $A_1 = A_2 = A_0$. Le 1^{er} mode est donc décrit par les expressions : $x_1 = A_0 \cos(\omega_1 t)$ et $x_2 = A_0 \cos(\omega_1 t)$. Les deux masses oscillent en phase avec la même amplitude ; le ressort central n'est pas sollicité dans le mouvement.

2^{ème} mode propre (fréquence $f_2 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3K}{m}}$) :

De la même façon, après remplacement de ω_{pr} par $\omega_2 = \sqrt{\frac{3K}{m}}$ dans l'équation 3.10.b, on obtient l'amplitude du 2^{ème} mode : $-K x_1 - K x_2 = 0$, soit pour les amplitudes : $A_1 = A_0$ et $A_2 = -A_0$. Le 2^{ème} mode est donc décrit par les expressions : $x_1 = A_0 \cos(\omega_2 t)$ et $x_2 = -A_0 \cos(\omega_2 t)$. Les deux masses oscillent en sens contraire avec la même amplitude. Dans ce mode, le milieu du ressort reste immobile ; le mouvement se passe comme si chaque masse était attachée à deux ressorts, l'un avec la raideur K et l'autre avec la raideur 2K, ou, ce qui est équivalent, à un ressort de raideur 3K.

Mouvement de l'oscillateur couplé avec des conditions initiales quelconques.

Lorsque les conditions initiales ne satisfont pas l'un ou l'autre des modes propres, la réponse du système est une combinaison d'oscillations sur les modes propres. La solution générale s'écrit :

$$(3.12) \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(\omega_{pr.1}) \\ \alpha_1 x_2(\omega_{pr.1}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1(\omega_{pr.2}) \\ \alpha_2 x_2(\omega_{pr.2}) \end{bmatrix}$$

où α_1 et α_2 sont les rapports d'amplitude des modes propres.

Conditions de couplage.

On peut définir un coefficient de couplage (ou interaction) C entre les 2 oscillateurs :

$$C = \frac{\sqrt{b_1 b_2}}{\sqrt{a_1 a_2}} = \frac{K_{12}}{\sqrt{(K_1 + K_{12})(K_2 + K_{12})}}$$

Ce coefficient indique comment le couplage influe sur les pulsations propres. Pour cela on définit les pulsations des oscillateurs découplés $\omega_{d.1}$ et $\omega_{d.2}$.

- On fixe l'oscillateur (2) en imposant $x_2(t)=0$; l'équation (3.8) s'écrit alors : $\frac{d^2 x_1}{dt^2} + a_1 x_1 = 0$.

L'oscillateur découplé qui reste a une pulsation propre $\omega_{d.1} = \sqrt{a_1} = \sqrt{\frac{K_1 + K_{12}}{m_1}}$.

- On fixe l'oscillateur (1) en imposant $x_1(t)=0$; l'oscillateur découplé (2) a une pulsation propre $\omega_{d.2} = \sqrt{a_2} = \sqrt{\frac{K_2 + K_{12}}{m_2}}$.

Il en résulte la relation suivante : $b_1 b_2 = C a_1 a_2 = C^2 \omega_{d.1} \omega_{d.2}$ qui permet d'écrire l'équation aux pulsations propres sous la forme :

$$(3.13) \quad (\omega_{d.1}^2 - \omega^2) (\omega_{d.2}^2 - \omega^2) - C^2 \omega_{d.1}^2 \omega_{d.2}^2 = 0.$$

Couplage fort : C = 1

L'équation aux valeurs propres devient : $\omega^2 \left[\omega^2 (\omega_{d.1}^2 + \omega_{d.2}^2) \right] = 0$,

$$(3.14) \quad \text{d'où les pulsations propres } \omega_1 = 0 \text{ et } \omega_2 = \sqrt{\omega_{d.1}^2 + \omega_{d.2}^2}$$

Couplage moyen : 0 < C < 1

Les pulsations propres sont :

$$(3.15) \quad \omega_{pr.1} = \omega_1 = \sqrt{\frac{(\omega_{d.1} + \omega_{d.2}) - \sqrt{\Delta}}{2}} \quad \text{et} \quad \omega_{pr.2} = \omega_2 = \sqrt{\frac{(\omega_{d.1} + \omega_{d.2}) + \sqrt{\Delta}}{2}}.$$

Couplage faible : $C \ll 1$

L'équation ci-dessus donne 2 pulsations propres l'une de l'autre :

$$(3.16) \quad \omega_{pr.1} \approx \omega_{d.1} \left[1 - \frac{C^2}{2 \left(1 - \frac{\omega_{d.1}^2}{\omega_{d.2}^2} \right)} \right] \quad \text{et} \quad \omega_{pr.2} \approx \omega_{d.2} \left[1 - \frac{C^2}{2 \left(\frac{\omega_{d.2}^2}{\omega_{d.1}^2} - 1 \right)} \right].$$

Il apparaît que, quel que soit le niveau de couplage, la relation ci-dessus existe entre les fréquences propres : $f_1 = \frac{1}{2\pi} \omega_1$ (1^{ère} fréquence propre) < $f_{d.1}$ et

$$f_2 = \frac{1}{2\pi} \omega_2 \text{ (2^{ème} pulsation propre) } > f_{d.2}.$$

Le couplage a pour effet d'écarter les fréquences propres.

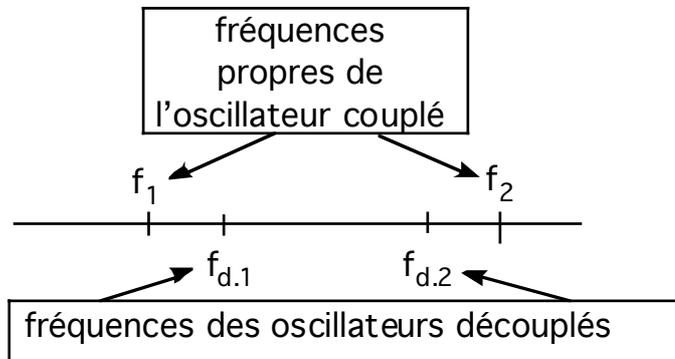


Fig. 3-6 : Écartement des fréquences propres par le couplage entre les oscillateurs

Phénomène de battement entre les 2 oscillateurs.

Lorsque le couplage est faible et que les fréquences propres des oscillateurs (en oscillations découplées, $\omega_{d.1} \approx \omega_{d.2}$) sont voisines, il se produit un phénomène de battement. Prenons l'exemple du système couplé symétrique m/K vu plus ci-dessus ($K_1 = K_2 = K$, $K_{12} \ll K_1$ et K_2 , $m_1 = m_2 = m$). Les pulsations propres sont :

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{K}{m}} \quad \text{et} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{K + 2K_{12}}{m}} = \omega_1 + \Delta\omega.$$

Dans ce cas, si à l'instant initial, on écarte l'une des masses d'une valeur A_0 , l'autre étant retenue et on lâche à $t=0$, on observe une oscillation modulée en amplitude. Avec les conditions initiales ci-dessus, le mouvement d'oscillations est donné par les expressions

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{A_0}{2} \cos(\omega_1 t) + \frac{A_0}{2} \cos[(\omega_1 + \Delta\omega)t] \\ x_2(t) = \frac{A_0}{2} \cos(\omega_1 t) - \frac{A_0}{2} \cos[(\omega_1 + \Delta\omega)t] \end{cases} \quad \text{ou encore :}$$

$$(3.17) \quad x_1(t) = A_0 \cos\left(\frac{1}{2}\Delta\omega t\right) \cos[\omega_1 t] \quad \text{et} \quad x_2(t) = A_0 \sin\left(\frac{1}{2}\Delta\omega t\right) \sin[\omega_1 t]$$

Il y a transfert d'énergie d'un pendule à l'autre. Le mouvement des 2 pendules, un battement à la pulsation $\omega_B = \Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$, est représenté ci-après. La période du battement définie comme l'intervalle de temps entre deux 'zéros' de l'amplitude $A_0 \cos(\frac{1}{2}\Delta\omega t)$ est égale à :

$$T_B = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1} ; \text{ la fréquence du battement est donc égale à la différence des fréquences propres du système } f_B = \frac{1}{T_B} = f_2 - f_1.$$

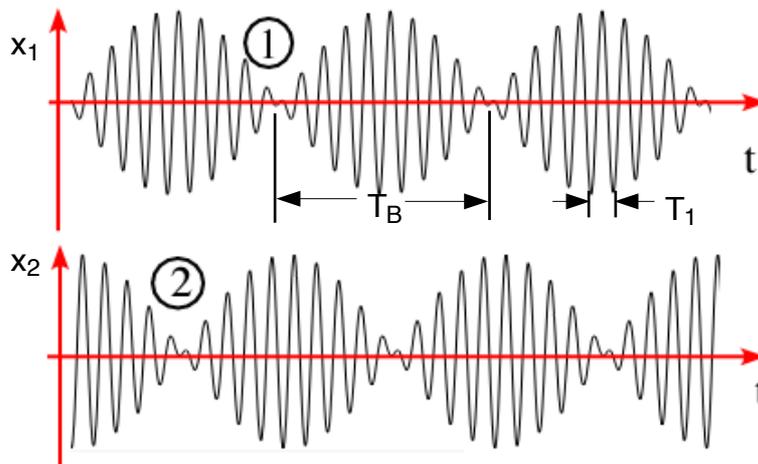


Fig. 3-7 : Amplitudes des 2 mouvements dans un système à 2 degrés de liberté à couplage faible lorsque l'excitation initiale a eu lieu sur un élément uniquement.

2.1.4. SYSTÈME À 2DDL EN RÉGIME FORCÉ

3.1.4.1. Équations du mouvement. Amortissement négligé.

Considérons à nouveau le système de 2 masses reliées par des ressorts à des supports rigides et ajoutons une force excitatrice $f_{ext} = F_{ext} \cos(\omega t)$ agissant sur l'oscillateur (O_I). (figure ci-après)

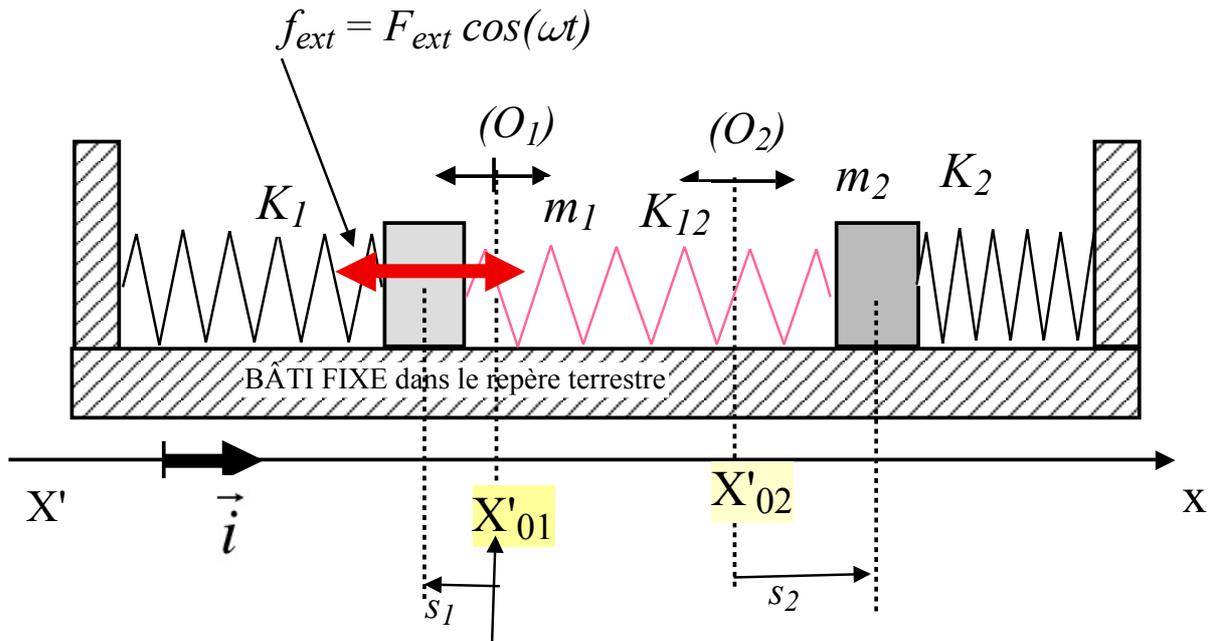


Fig. 3-8 : Oscillateur mécanique à 2 degrés de liberté en régime forcé : l'oscillateur (O_1) subit l'action d'une force $f_{ext} = F_{ext} \cos(\omega t)$

Les équations de mouvement deviennent :

$$(3.18) \quad \left\{ \begin{array}{l} m_1 \frac{d^2 s_1}{dt^2} + (K_1 + K_{12})s_1 - K_{12} s_2 = F_{ext} \cos(\omega t) \\ m_2 \frac{d^2 s_2}{dt^2} + (K_2 + K_{12})s_2 - K_{12} s_1 = 0 \end{array} \right\}$$

Les équations différentielles peuvent être mises sous la forme ci-après :

$$(3.19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 s_1}{dt^2} + a_1 s_1 - b_1 s_2 = c \cos(\omega t) \\ \frac{d^2 s_2}{dt^2} + a_2 s_2 - b_2 s_1 = 0 \end{array} \right\}$$

$$(3.20) \quad \text{avec } a_1 = \frac{K_1 + K_{12}}{m_1} ; b_1 = \frac{K_{12}}{m_1} ; a_2 = \frac{K_2 + K_{12}}{m_2} ; b_2 = \frac{K_{12}}{m_2} ; c = \frac{F_{ext}}{m_1}.$$

On cherche d'abord les solutions avec les hypothèses suivantes.

- 1. On considère uniquement le régime forcé permanent, qui subsiste après amortissement du régime libre étudié ci-dessus.
- 2. L'amortissement est suffisamment important pour que le régime transitoire disparaisse rapidement
- 3. L'amortissement est suffisamment faible pour que les pulsations libres et les pulsations de résonance diffèrent peu (ce qui correspond dans un oscillateur mécanique à un facteur de perte d compris entre 0,001 et 0,2).

On trouve alors des solutions de la forme :

$$s_{1,2}(t) = X_{1,2} \cos(\omega t + \varphi_{1,2}) \text{ pour le régime permanent où } \omega \text{ est la pulsation d'excitation, ou en}$$

écrivait sous la forme complexe :

$$x_1(t) = \overline{X}_1 e^{j\omega t} \text{ et } x_2(t) = \overline{X}_2 e^{j\omega t}.$$

Le système d'équations différentielles devient :

$$\begin{aligned} (a_1 - \omega^2) \overline{X}_1 - b_1 \overline{X}_2 &= c \\ -b_2 \overline{X}_1 + (a_2 - \omega^2) \overline{X}_2 &= 0 \end{aligned} \quad (a)$$

ou, sous la forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} a_1 - \omega^2 & -b_1 \\ -b_2 & a_2 - \omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{X}_1 \\ \overline{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix}$$

Les solutions de cette équation matricielle (obtenues par la méthode de Kramer) s'écrivent :

$$(3.21) \quad \overline{X}_1 = \frac{\begin{vmatrix} c & -b_1 \\ 0 & a_2 - \omega^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 - \omega^2 & -b_1 \\ -b_2 & a_2 - \omega^2 \end{vmatrix}} \text{ et } \overline{X}_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_1 - \omega^2 & c \\ -b_2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 - \omega^2 & -b_1 \\ -b_2 & a_2 - \omega^2 \end{vmatrix}}.$$

Après développement, on obtient :

$$(3.22) \quad \overline{X}_1(\omega) = \frac{c(a_2 - \omega^2)}{(a_1 - \omega^2)(a_2 - \omega^2) - b_1 b_2} \text{ et } \overline{X}_2(\omega) = \frac{c b_2}{(a_1 - \omega^2)(a_2 - \omega^2) - b_1 b_2}.$$

3.1.4.2. Résonances et Antirésonance.

X_1 et X_2 passent par l'infini lorsque ω prend les valeurs des fréquences propres (zéro au dénominateur des expressions ci-dessus), ce sont les **résonances**. En pratique il y a toujours de l'amortissement qui augmente avec l'amplitude et qui vient limiter les amplitudes de résonance.

Pour la pulsation $\omega = \sqrt{a_2} = \sqrt{\frac{K_2 + K_{12}}{m_2}}$, l'amplitude de X_1 s'annule, on a une **antirésonance**. La masse m_1 qui subit l'excitation n'accumule pas d'énergie (son amplitude reste faible). La résonance (qui se traduit par une accumulation d'énergie) se manifeste dans les autres parties du système, ici sur la masse m_2 .

Lorsque $\omega \rightarrow \infty \Rightarrow X_1 \rightarrow 0$ par valeurs négatives et $X_2 \rightarrow 0$ par valeurs positives.

L'allure des amplitudes d'oscillation dans un système non amorti en fonction de la pulsation de la force d'excitation est montrée sur le graphe ci-après.

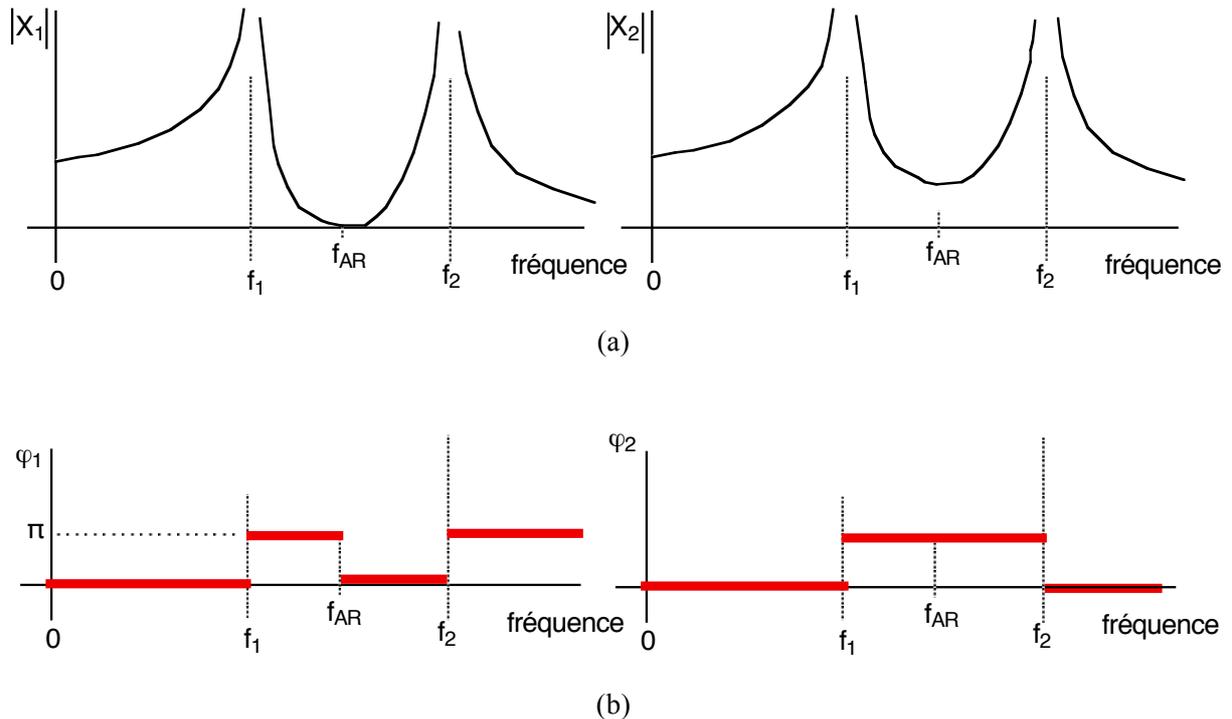


Fig. 3-9 : Réponses d'un système à 2 degrés de liberté en régime forcé à la fréquence une fréquence f que l'on fait varier (amortissement négligeable). f_1 et f_2 sont les fréquences des modes propres. f_{AR} est la fréquence d'antirésonance.
(a) amplitudes – (b) déphasage par rapport à l'excitation

2.1.5. RÉSONANCES DANS LES SYSTÈMES RÉELS À PLUSIEURS DEGRÉS DE LIBERTÉ EN RÉGIME FORCÉ. INFLUENCE DES AMORTISSEMENTS.

En régime forcé avec excitation harmonique, les pulsations propres d'un système à 2 degrés de liberté conduisent à des valeurs infinies pour les amplitudes X_1 et X_2 . Ce phénomène de résonance a lieu pour les 2 composantes du système simultanément. De façon générale, lorsqu'on excite un système présentant plusieurs degrés de liberté, on observe un phénomène de résonance pour chaque coïncidence entre la fréquence d'excitation et une fréquence propre du système.

L'amortissement influe sur les résonances ; plus les amortissements sont importants, moins les résonances sont gênantes : l'amplitude diminue et le pic s'élargit.

Dans un système complexe, on obtiendra un spectre quasi continu dans lequel les pics se recouvrent partiellement ; quelques pics correspondant à des résonances particulières peuvent dominer. Un exemple est montré ci-après. La modélisation du système devient difficile avec l'augmentation du nombre de degrés de liberté. Seule l'observation expérimentale des résonances permet d'accéder aux fréquences propres.

En pratique les amplitudes des oscillations à la résonance sont limitées par :

- l'amortissement qui n'est jamais nul ;
- par la non-linéarité des forces de rappel (K augmente avec l'amplitude) ;
- par les limites géométriques (présence de butées) ou encore
- par la rupture du système.

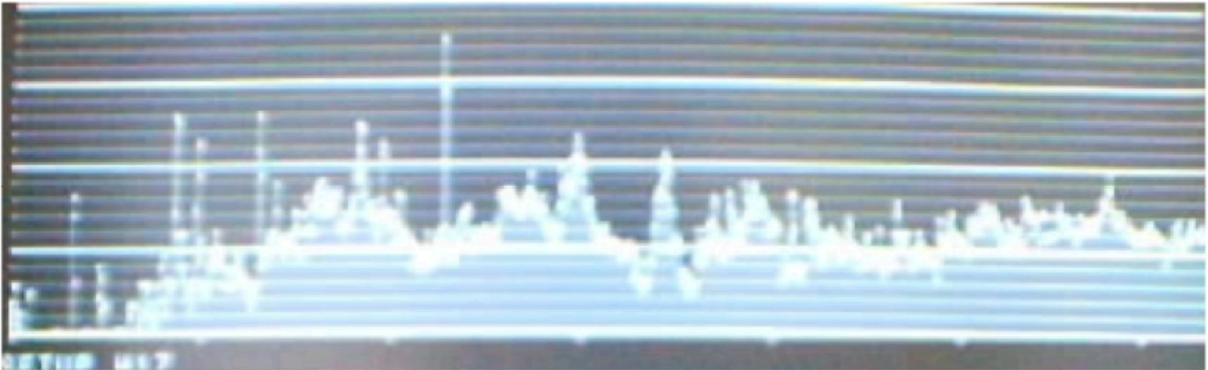


Fig. 3-10 : Exemple de spectre (d'un motoréducteur) dans lequel les pics de résonance se recouvrent pour donner un spectre quasi continu dans lequel quelques pics, correspondant à des résonances caractéristiques, dominent.

La prise en compte des amortissements présente un intérêt pour les systèmes fortement amortis (facteur de perte $> 0,2$ pour chaque oscillateur). La démarche est la suivante.

- On détermine les fréquences et modes propres du système libre non amorti (fréquences de résonance, d'antirésonance, modes d'oscillation à la résonance).
- On ajoute ensuite les termes d'amortissement ($h_i = \frac{Kd_i}{\omega}$).
- L'étude est ensuite faite de préférence numériquement.

Application à l'absorbeur dynamique

Il s'agit d'annuler sur une machine ou structure quelconque, une vibration provenant d'une excitation à une fréquence constante en couplant un oscillateur en opposition de phase accordé à la même fréquence.

2.1.6. FACTEUR DE TRANSMISSION DES VIBRATIONS

Les dispositifs d'atténuation des vibrations peuvent être assimilés au système couplé représenté ci-après. Les oscillations imposées à la masse M_1 se transmettent à la masse M_2 . Il existe une plage de fréquences pour lesquelles les amplitudes de vibrations sont atténuées.

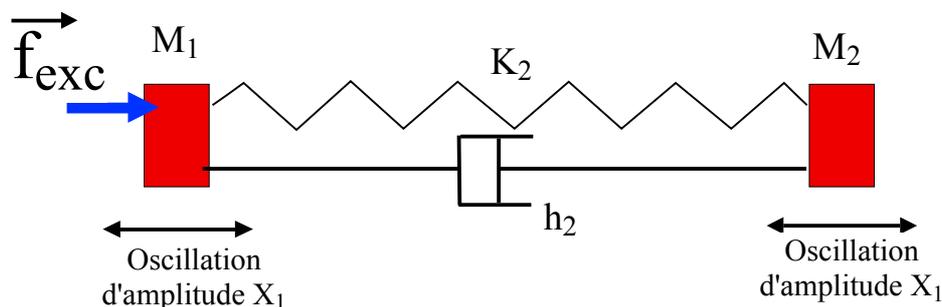


Fig. 3-11 : Oscillateur amorti et forcé. Transmission des vibrations.

Considérons l'oscillateur de la figure ci-dessus. Une force d'excitation du type $f_{ext}(t) = F_{ext} \cos(\omega t)$ met l'oscillateur en régime permanent. La vibration est transmise à la masse M_2 par l'intermédiaire du ressort de raideur K_2 . L'équation de la dynamique appliquée à M_2 donne

$$M_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -K_2 (x_2 - x_1) - h_2 \left(\frac{dx_2}{dt} - \frac{dx_1}{dt} \right) \quad (13)$$

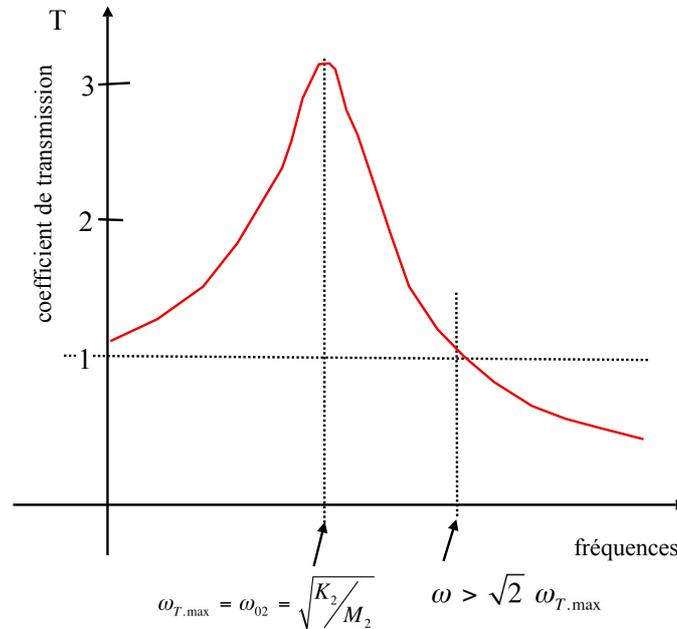
On en déduit la transmission complexe \tilde{T} : $\tilde{T} = \frac{\tilde{X}_2}{\tilde{X}_1} = \frac{K_2 + jh_2\omega}{(K_2 - M_2\omega^2) + jh_2\omega}$

dont le module est donné par $\hat{T} = \sqrt{\frac{K_2^2 + (h_2\omega)^2}{(K_2 - M_2\omega^2)^2 + (h_2\omega)^2}}$ ou $\hat{T} = \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{h_2}{K_2}\omega\right)^2}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{02}^2}\right)^2 + \left(\frac{h_2}{K_2}\omega\right)^2}}$

Le coefficient T prend une valeur maximale pour la valeur de ω suivante :

$$\omega_{T.\max} = \omega_{02} = \sqrt{K_2/M_2}$$

La figure ci-après montre l'allure de la courbe de transmission en fonction de la fréquence d'excitation.



On observe que:

- le coefficient T devient inférieur à 1 pour $\omega > \sqrt{2} \omega_{02}$; on travaillera toujours dans cette zone pour réduire la transmission des vibrations ;

- $T_{\max} = T(\omega_{T.\max}) \approx h_2\omega/K_2$; le coefficient de frottement limite la transmission des vibrations ;

- une valeur trop grande de h_2 limite l'efficacité de la suspension (dans le domaine $\omega > \sqrt{2} \omega_{T.\max}$).

2.2. OSCILLATIONS DE SYSTÈME MÉCANIQUES À N DEGRÉS DE LIBERTÉ

2.2.1. DÉFINITION

Un système oscillateur présente N degrés de liberté s'il nécessite N paramètres pour définir sa position à un instant t. Nous considérerons ici des systèmes linéaires dont la mise en équation aboutit à un système de N équations différentielles linéaires. Le nombre de degrés de liberté dépend de la structure du système. S'il s'agit d'un

- système à N particules, les mouvements sont des translations et le nombre maximum de degrés de liberté sera égal à 3N.
- Si le système est constitué de N corps étendus, il faut ajouter les rotations et le nombre maximum de degrés de liberté sera égal à 6N.

2.2.2. MISE EN ÉQUATION DE SYSTÈME À N DEGRÉS DE LIBERTÉ - RECHERCHE DES FRÉQUENCES PROPRES.

3.2.2.1. Cas général de N degrés de liberté

Les systèmes d'équations à résoudre sont de la forme :

$$(3.23) \quad [m][\ddot{x}] + [R][\dot{x}] + [K][x] = [F] \cos \omega t$$

où [K] représente une matrice carré NxN et [x] un vecteur colonne.

Pour les systèmes libres non amortis à N degrés de liberté, l'équation (1.78) devient :

$$(3.24) \quad [m][\ddot{x}] + [K][x] = 0$$

Il apparaît donc que

le nombre de fréquences propres est égal au nombre de degrés de liberté.

La recherche de fréquences propres et de modes de vibration se ramène à la recherche de valeurs propres et de vecteurs propres d'une matrice carrée symétrique de dimension NxN. Il existe plusieurs méthodes mathématiques pour chercher ces solutions : méthode directe si N est petit (< 6), ou méthodes numériques si N est grand.

3.2.2.2. Mise en équation d'un modèle à 3 degrés de liberté

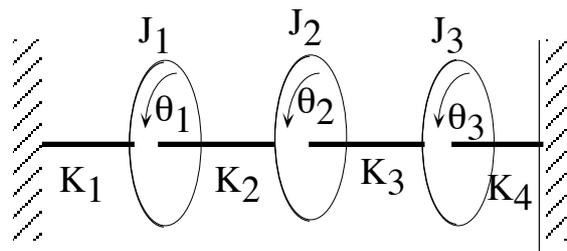


Fig. 3-12 : Système de 3 pendules de torsion couplés

Considérons un modèle en torsion à 3 degrés de liberté.

Le mouvement de ce système à trois degrés de liberté est décrit par les solutions du système d'équations suivant :

$$(3.25) \quad \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1+K_2 & -K_2 & 0 \\ 0 & K_2+K_3 & -K_3 \\ 0 & -K_3 & K_3+K_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En admettant des solutions du type $\theta = \Theta \cos(\omega t + \varphi)$, et en passant à la forme complexe, on obtient le système suivant :

$$(3.26) \quad -\omega^2 [M] [\Theta] + [K] [\Theta] = 0 .$$

Soit $[M^{-1}]$ la matrice inverse de $[M]$, on obtient :

$$(3.27) \quad \omega^2 [\Theta] = [M^{-1}] [K] [\Theta] \text{ ou}$$

$$(3.28) \quad \lambda [\Theta] = [A] [\Theta] \text{ avec } \lambda = \omega^2 \text{ et } [A] = [M^{-1}] [K] .$$

Il s'agit là d'un problème classique de recherche de valeurs propres et de vecteurs propres de la matrice carrée $[A]$. Les valeurs propres sont les carrés des pulsations propres et les vecteurs propres correspondent aux modes.

Les diverses méthodes numériques qui existent pour résoudre ce problème utilisent la propriété d'orthogonalité des modes énoncée ci-après.

$[\theta_i]$ et $[\theta_j]$ étant les vecteurs propres correspondant aux modes $N^{\circ}i$ et $N^{\circ}j$ et $[\theta_j]^T$ les vecteurs transposés, on démontre que :

$$(3.29) \quad [\theta_i]^T [M] [\theta_j] = 0 \text{ et}$$

$$[\theta_i]^T [K] [\theta_j] = 0 , \text{ pourvu que } i \neq j \text{ et } \omega_i \neq \omega_j .$$

3.2.2.3. Résolution manuelle d'un modèle simplifié de système à 3 degrés de liberté

Considérons le modèle en torsion décrit ci-dessus avec $J_1 = J_2 = J_3 = J$ et $K_1 = K_2 = K_3 = K$. En passant au formalisme complexe, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} (2K - J\omega^2) \Theta_1 - K\Theta_2 = 0 \\ -K\Theta_1 + (2K - J\omega^2) \Theta_2 - K\Theta_3 = 0 \\ 0 - K\Theta_2 + (2K - J\omega^2) \Theta_3 = 0 \end{array} \right.$$

Le système est compatible si le déterminant est nul, ce qui donne :

$$(3.30) \quad \left(\frac{J}{K}\right)^3 \omega^6 - 6\left(\frac{J}{K}\right)^2 \omega^4 + 10\left(\frac{J}{K}\right) \omega^2 - 4 = 0 .$$

$$\text{Les solutions sont : } \omega_1 = \sqrt{0,6 \frac{K}{J}} ; \omega_2 = \sqrt{2 \frac{K}{J}} ; \omega_3 = \sqrt{3,4 \frac{K}{J}} .$$

Pour obtenir les modes, on prend successivement ω_1 , ω_2 , et ω_3 que l'on substitue dans les deux 1ères équations du système.

Application numérique : $M = 1$; $K = 1$. Les fréquences sont alors $\omega_1 = 0,77$; $\omega_2 = 1,414$ et $\omega_3 = 1,84$. En prenant $\Theta_1 = 1$, on trouve les amplitudes suivantes pour les 3 fréquences propres :

Pour ω_1 : $\Theta_1 = 1$, $\Theta_2 = 1,4$, $\Theta_3 = 1$.

Pour ω_2 : $\Theta_1 = 1$, $\Theta_2 = 0$, $\Theta_3 = -1$ (il y a un nœud au niveau du volant 2).

Pour ω_3 : $\Theta_1 = 1$, $\Theta_2 = -1,4$, $\Theta_3 = 1$.

3.2.2.4. Les modes propres d'un système à N degrés de liberté

Les vecteurs propres de la matrice décrivant un système à N degrés de liberté permettent de définir les modes du système considéré ; un système d'ordre N possède N modes. Un mode se caractérise par

- une fréquence propre ω_n ;
- une allure caractéristique définie par les rapports d'amplitude A:B:C:D ...correspondant aux différents degrés de liberté 0, 1, 2 , ..., n-1;
- dans chaque mode, la constante de phase est la même pour chaque degré de liberté, ce qui signifie que toutes les parties mobiles passent simultanément à la position d'équilibre. De même, chaque partie mobile est soumise à la même force de rappel par unité de déplacement, par unité de masse. La phase du mode est déterminée par les conditions initiales.

Exemple d'un système à 4 degrés de liberté notés (O_1, O_2, O_3, O_4). Supposons que dans le mode 1, le rapport des amplitudes soit

$$A_1:A_2:A_3:A_4 = 1:-2:0:6.$$

Dans ce mode, les mouvements des oscillateurs O_1, O_2, O_3 et O_4) sont donnés par :

$$\psi_1 = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1), \psi_2 = -2\psi_1, \psi_3 = 0, \psi_4 = 6 \psi_1.$$

Lorsque le nombre de parties mobiles devient très grand, on peut considérer que le système se comporte comme s'il était **continu**. Deux points voisins proches ont des mouvements très semblables. Cette hypothèse nous permet de décrire le déplacement vectoriel de toutes les parties mobiles dans un petit volume autour de (x,y,z) par une quantité vectorielle $\psi(x, y, z, t)$. Le déplacement $\psi(x, y, z, t)$ est une fonction continue de (x, y, z) et du temps. $\psi(x, y, z, t)$ joue le rôle que jouent les $\psi_a, \psi_b \dots$ dans les systèmes discrets. On attribue le nom **d'onde** au phénomène observé. La notion d'onde est développée plus loin.

Un système à plusieurs DDL que l'on écarte de sa position d'équilibre à un instant donné, aura tendance à osciller sur ses différentes fréquences propres en même temps. L'amplitude des différents modes dépend des conditions initiales. L'amortissement a tendance à augmenter avec la fréquence du mode. On observe donc une évolution vers une oscillation sur les modes de plus basses fréquences, voire le mode fondamental.

En régime forcé, en régime permanent, l'oscillateur à plusieurs DDL, oscillera, comme l'oscillateur à 1 DDL, sur la fréquence d'excitation. Dans certains cas, on peut observer une oscillation sur une fréquence multiple de la fréquence d'excitation.

A chaque coïncidence entre la fréquence d'excitation et une fréquence propre, on observe une résonance.

3.2.2.5. Méthode de Lagrange de mise en équation de système à N degrés de liberté

Considérons les cas de systèmes conservatifs non excités (étape de toute façon utile pour rechercher les modes et les fréquences propres).

Soient q_1, \dots, q_n les N coordonnées indépendantes qui définissent la position du système à un instant donné, E_{cin} , l'énergie cinétique, E_{pot} , l'énergie potentielle exprimée à l'aide des q_i et \dot{q}_i . L'équation de Lagrange :

$$(3.31) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\delta E_{\text{cin}}}{\delta \dot{q}_i} \right) - \frac{\delta E_{\text{cin}}}{\delta q_i} + \frac{\delta E_{\text{pot}}}{\delta q_i} = 0$$

(avec $i = 1, \dots, N$) permet d'obtenir les N équations différentielles.

3.2.2.6. Méthode des coefficients d'influence de mise en équation de système à N degrés de liberté

Dans un système à plusieurs degrés de liberté, le coefficient d'influence α_{ij} est le déplacement du composant i pour une force unitaire appliquée au composant j . Le théorème de réciprocité de Maxwell spécifie en outre que $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$. Cette méthode est très utilisée en RdM.

2.2.3. CAS D'UN SYSTÈME DE 3 MASSES RELIÉES PAR DES CORDES ÉLASTIQUES IDENTIQUES.

La recherche des modes propres d'un système à plusieurs degrés de liberté peut être illustrée dans le cas des vibrations de masses reliées entre elles par une corde élastique fixée aux deux extrémités. La figure ci-après montre les modes de vibration dans le cas où $N=1$ et $N=2$.

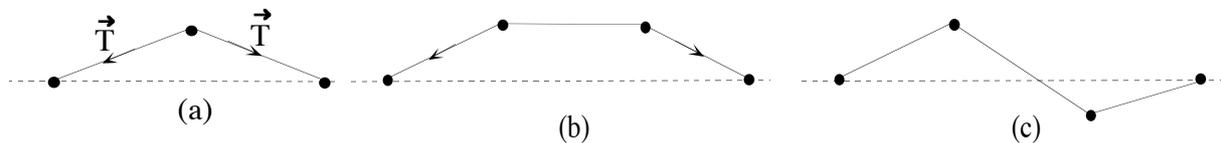


Fig. 3-13 : Modes de vibration d'une chaîne de masses reliées par une corde élastique pour $N = 1$ (a) et $N = 2$ (b et c).

Tout système réel est constitué d'un grand nombre de particules reliées entre elles par des forces. L'extrapolation du comportement de chaînes de masses attachées nous mène vers l'analyse des mouvements dans les milieux continus.

En pratique, la recherche des modes propres se fait par l'excitation de la structure à toutes les fréquences, soit par une excitation impulsionnelle, soit par une excitation sinusoïdale à fréquence variable.

2.2.4. RECHERCHE DE SOLUTIONS POUR UN SYSTÈME FORCÉ À 4 DEGRÉS DE LIBERTÉ

Considérons le système à 4 volants en torsion représenté ci-après.

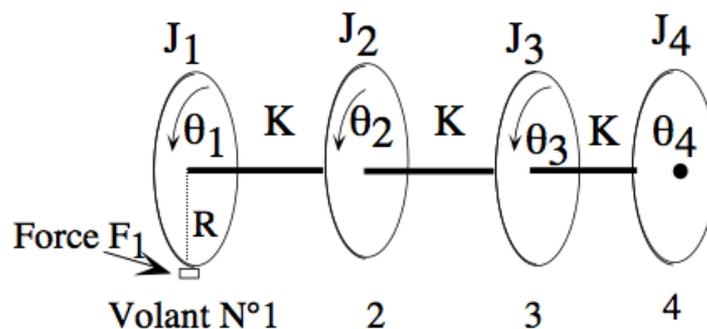


Fig. 3-14 : Système de 4 volants reliés par un axe sollicité en torsion. K : raideur en torsion des différentes parties de l'axe. Le volant 1 est sollicité par le couple $F_1R \cos \omega t$.

En notation matricielle, le système ci-dessus est décrit par l'équation :

$$(3.32) \quad [J][\ddot{\theta}] + [K][\theta] = [F_1 R] \cos(\omega t)$$

En régime permanent, on recherche des solutions de la forme $\theta = \Theta \cos(\omega t + \varphi)$, ω étant la pulsation excitatrice pouvant varier entre 0 et une valeur ω_{\max} maximale définie par des aspects pratiques. En passant au formalisme complexe, on obtient :

$$(3.33) \quad -\omega^2 [J] [\Theta] + [K] [\Theta] = [F_1 R] \text{ soit,}$$

$$[K - m\omega^2] [\Theta] = [F_1 R].$$

La résolution de l'équation ci-dessus permet d'obtenir les amplitudes de torsion des volants pour les différentes fréquences d'excitation appliquée au volant 1. Un micro-ordinateur permet facilement d'obtenir la réponse spectrale du système, c'est-à-dire les différents $\Theta_1(\omega)$ pour l'intervalle $[0, \omega_{\max}]$.

Remarque : Les valeurs de ω qui annulent le déterminant $[K - m\omega^2]$ conduisent à des amplitudes infinies, ce qui correspond aux résonances. En pratique, il convient de traiter d'abord le cas des oscillations libres pour obtenir ces valeurs.

2.3. OSCILLATEUR ÉLECTRIQUE À 2 DEGRÉS DE LIBERTÉ

2.3.1. OSCILLATEUR ÉLECTRIQUE COUPLÉ À 2 DDL EN RÉGIME LIBRE

3.3.1.1. Les fréquences propres

Considérons le circuit électrique représenté ci-après.

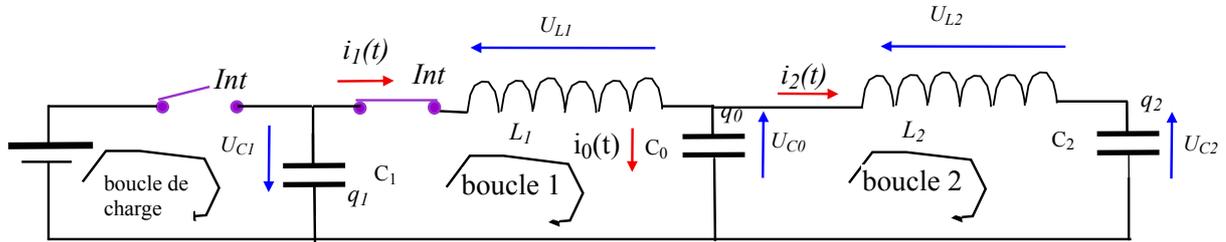


Fig. 3-15 : Oscillateur électrique à 2 ddl. Les ddp sont indiquées avec la convention récepteur. q_1 , q_2 et q_0 sont les charges positives sur les armatures d'entrée des condensateurs.

Si à $t=0$ le condensateur C_1 contient des charges, et si à cet instant on ferme l'interrupteur de la boucle 1 (en ouvrant celui de la boucle de charge), un courant $i_1(t)$ circule dans la maille 1 et un courant $i_2(t)$ circule dans la maille 2. Des oscillations apparaissent et, comme dans le cas mécanique, ces oscillations se font sur des fréquences particulières, les fréquences propres.

Pour trouver les fréquences propres en fonction des caractéristiques du circuit, on applique les lois des circuits (loi des mailles et loi des nœuds) et l'on tient compte de la loi de conservation des charges.

Soient $q_1(t)$, $q_0(t)$ et $q_2(t)$ les charges respectives (positives) des armatures de sortie (du courant) des 3 condensateurs. En adoptant la **convention récepteur**, les courants et tensions sont orientés comme indiqué sur le schéma ci-dessus, ce qui donne pour les tensions :

$$u_{C_0} = \frac{q_0}{C_0}, \quad u_{C_1} = \frac{q_1}{C_1} \quad \text{et} \quad u_{C_2} = \frac{q_2}{C_2}.$$

Appliquons la loi des mailles à la maille 1. On obtient : $u_{C_0} + u_{L_1} + u_{C_1} = 0$.

$$\text{Soit } \frac{q_0}{C_0} + L_1 \frac{di_1}{dt} + \frac{q_1}{C_1} = 0$$

$$\text{et pour la maille 2 : } u_{C_2} + u_{L_2} - u_{C_0} = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{q_2}{C_2} + L_2 \frac{di_2}{dt} - \frac{q_0}{C_0} = 0.$$

Nous avons les relations suivantes pour les courants :

$$\frac{dq_1}{dt} = i_1, \quad \frac{dq_2}{dt} = i_2 \quad \text{et} \quad i_0 = i_1 - i_2 = \frac{dq_0}{dt}$$

Pour observer l'analogie avec le système mécanique vu précédemment, exprimons l'état du système par la charge sur l'armature de sortie du condensateur ($q(t)$ étant l'analogue du déplacement $s(t)$ de la masse du système m - K) ([analogie électro-mécanique directe](#)).

$$\text{On a } q_0 = q_1 - q_2 \quad \text{et} \quad u_{L_1} = L_1 \frac{di_1}{dt} = L_1 \frac{d^2 q_1}{dt^2}$$

Les équations des mailles s'écrivent comme suit en fonction des charges q_1 et q_2 :

$$L_1 \frac{d^2 q_1}{dt^2} + \frac{1}{C_1} q_1 + \frac{1}{C_0} (q_1 - q_2) = 0$$

Pour la 2^{ème} maille on a :

$$\frac{q_2}{C_2} + L_2 \frac{di_2}{dt} - \frac{q_0}{C_0} = 0$$

$$\text{soit } L_2 \frac{d^2 q_2}{dt^2} + \frac{1}{C_2} q_2 - \frac{1}{C_0} (q_1 - q_2) = 0$$

On obtient finalement le système d'équations différentielles suivantes :

$$(3.34) \quad \begin{cases} L_1 \frac{d^2 q_1(t)}{dt^2} + \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_0} \right) q_1(t) - \frac{1}{C_0} q_2(t) = 0 \\ L_2 \frac{d^2 q_2(t)}{dt^2} + \left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_0} \right) q_2(t) - \frac{1}{C_0} q_1(t) = 0 \end{cases}$$

ou encore :

$$(3.35) \quad \begin{cases} \frac{d^2 q_1(t)}{dt^2} + \frac{1}{L_1} \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_0} \right) q_1(t) - \frac{1}{L_1} \frac{1}{C_0} q_2(t) = 0 \\ \frac{d^2 q_2(t)}{dt^2} + \frac{1}{L_2} \left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_0} \right) q_2(t) - \frac{1}{L_2} \frac{1}{C_0} q_1(t) = 0 \end{cases}$$

Remarque : En exprimant l'état du système en fonction des courants, on obtient des expressions similaires :

$$\begin{cases} \frac{d^2 i_1(t)}{dt^2} + \frac{1}{L_1} \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_0} \right) i_1(t) - \frac{1}{L_1} \frac{1}{C_0} i_2(t) = 0 \\ \frac{d^2 i_2(t)}{dt^2} + \frac{1}{L_2} \left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_0} \right) i_2(t) - \frac{1}{L_2} \frac{1}{C_0} i_1(t) = 0 \end{cases}$$

Ce système d'équation est identique à celui trouvé pour le système mécanique. Toutes les notions introduites précédemment peuvent être utilisées dans ce cas. On peut donc l'écrire sous la forme suivante et utiliser les expressions obtenues précédemment pour les pulsations propres.

$$(3.36) \quad \begin{cases} \frac{d^2 i_1}{dt^2} + a_1 i_1 - b_1 i_2 = 0 \\ \frac{d^2 i_2}{dt^2} + a_2 i_2 - b_2 i_1 = 0 \end{cases}$$

$$(3.37) \quad \text{avec } a_1 = \frac{1}{L_1} \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_0} \right) ; b_1 = \frac{1}{L_1 C_0} ; a_2 = \frac{1}{L_2} \left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_0} \right) ; b_2 = \frac{1}{L_2 C_0} .$$

En faisant le même raisonnement que pour le système mécanique, on obtient les deux fréquences propres :

$$(3.38) \quad f_{pr.1} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{(a_1 + a_2) - \sqrt{\Delta}}{2}} \quad \text{et} \quad f_{pr.2} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{(a_1 + a_2) + \sqrt{\Delta}}{2}} .$$

avec $\Delta = (a_1 + a_2)^2 - 4(a_1 a_2 - b_1 b_2)$

Les solutions particulières s'écrivent :

$$(3.39) \quad \widetilde{q_{1,2}}(t) = \widetilde{Q_{1,2}} e^{j\omega_{pr.1,pr.2} t}$$

Pour faire apparaître ces solutions particulières appelées modes propres, il faut des conditions initiales particulières, faciles à deviner pour un système symétrique, pas intuitive dans le cas d'un système quelconque. Des conditions initiales quelconques donnent naissance à une réponse constituée d'une superposition des modes propres.

3.3.1.2. Les modes propres

Comme pour le système d'oscillateurs mécaniques, on peut identifier pour chaque fréquence propre, un mode propre d'oscillation. Ces modes sont faciles à deviner dans le cas du système symétrique, mais pas dans un cas quelconque.

Le 1^{er} mode : Pour l'observer, on part des conditions initiales suivantes les condensateurs 1 et 2 sont chargés, l'un avec une charge +Q, l'autre avec la charge opposée -Q, le condensateur de couplage étant déchargé (cas a). A la fermeture des interrupteurs, les charges vont osciller d'un condensateur à l'autre sans que le courant circule dans le condensateur C₀.

Le 2^{ème} mode : Les condensateurs 1 et 2 ont la même charge au départ, le condensateur de couplage étant déchargé. A la fermeture des interrupteurs, les charges des deux condensateurs partent vers C₀ pour repartir ensuite de façon symétrique et ainsi osciller.

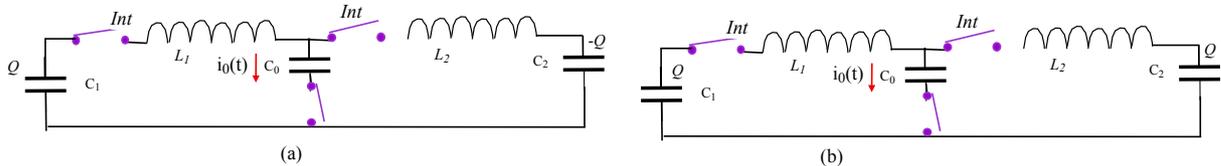


Fig. 3-16 : Conditions initiales pour exciter les modes propres.

2.3.1. OSCILLATEUR ÉLECTRIQUE COUPLÉ À 2 DDL EN RÉGIME FORCÉ

On place le système d'oscillateurs en régime forcé en insérant un générateur de signal périodique dans l'une des boucles, soit $e(t) = U \cos(\omega t)$.

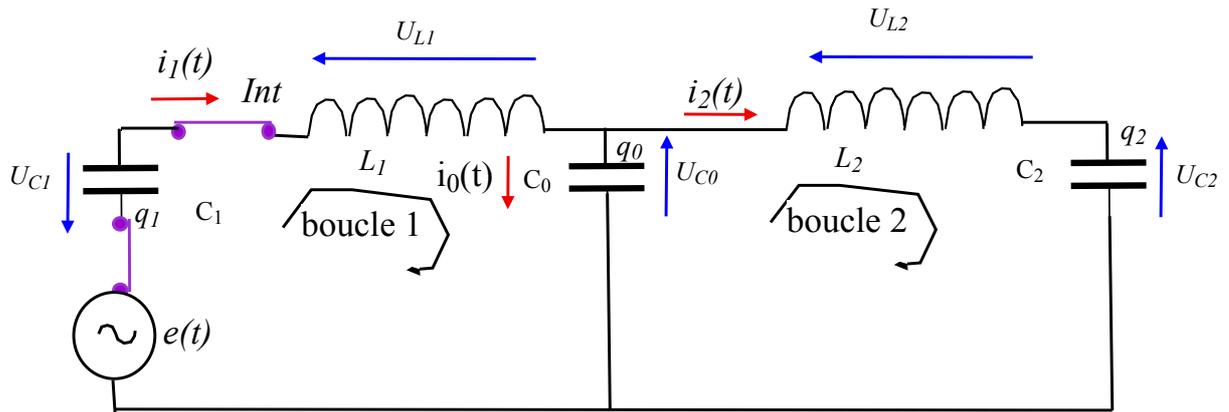


Fig. 3-17 : Système électrique couplé en régime forcé.

On applique la loi des mailles aux deux boucles et on obtient les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{q_0}{C_0} + L_1 \frac{di_1}{dt} + \frac{q_1}{C_1} = e(t) \\ \frac{q_2}{C_2} + L_2 \frac{di_2}{dt} - \frac{q_0}{C_0} = 0 \end{array} \right.$$

ou encore, (en utilisant la loi des nœuds $i_0 = i_1 - i_2 = \frac{dq_0}{dt}$)

$$(3.40) \quad \left\{ \begin{array}{l} L_1 \frac{d^2 q_1(t)}{dt^2} + \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_0} \right) q_1(t) - \frac{1}{C_0} q_2(t) = e(t) \\ L_2 \frac{d^2 q_2(t)}{dt^2} + \left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_0} \right) q_2(t) - \frac{1}{C_0} q_1(t) = 0 \end{array} \right.$$

qu'on peut écrire sous une forme analogue au cas mécanique :

$$(3.41) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 q_1(t)}{dt^2} + \frac{1}{L_1} \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_0} \right) q_1(t) - \frac{1}{L_1 C_0} q_2(t) = \frac{1}{L_1} U \cos(\omega t) \\ \frac{d^2 q_2(t)}{dt^2} + \frac{1}{L_2} \left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_0} \right) q_2(t) - \frac{1}{L_2 C_0} q_1(t) = 0 \end{array} \right.$$

Il est maintenant possible d'utiliser les résultats obtenus dans l'exemple mécanique pour décrire le comportement de l'oscillateur lorsqu'on fait varier la pulsation du signal de la source.

On utilise la forme canonique précédente :

$$(3.42) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 q_1}{dt^2} + a_1 q_1 - b_1 q_2 = c \cos(\omega t) \\ \frac{d^2 q_2}{dt^2} + a_2 q_2 - b_2 q_1 = 0 \end{array} \right.$$

$$\text{avec } a_1 = \frac{1}{L_1} \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_0} \right) ; \quad b_1 = \frac{1}{L_1 C_0} ; \quad a_2 = \frac{1}{L_2} \left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_0} \right) ; \quad b_2 = \frac{1}{L_2 C_0} ; \quad c = \frac{U}{L_1}$$

Comme dans le cas mécanique, il est possible d'obtenir les amplitudes en régime permanent en fonction de la pulsation ω de la source en injectant la solution

$$q_{1,2}(t) = Q_{1,2} \cos(\omega t + \varphi_{1,2})$$

dans les équations différentielles, après l'avoir écrite sous forme complexe : $\widetilde{q_{1,2}}(t) = \overline{Q_{1,2}}(\omega) e^{j\omega t}$.

On obtient :

$$\begin{bmatrix} a_1 - \omega^2 & -b_1 \\ -b_2 & a_2 - \omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{Q_1} \\ \overline{Q_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix}$$

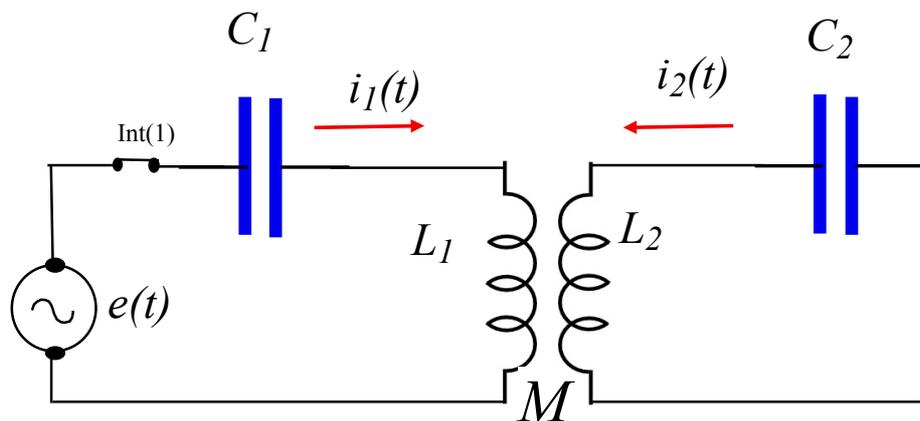
soient les expressions suivantes pour les amplitudes (complexes) de charges (amplitude et phase):

$$\overline{Q_1}(\omega) = \frac{c(a_2 - \omega^2)}{(a_1 - \omega^2)(a_2 - \omega^2) - b_1 b_2} \quad \text{et} \quad \overline{Q_2}(\omega) = \frac{c b_2}{(a_1 - \omega^2)(a_2 - \omega^2) - b_1 b_2}.$$

Remarque : la valeur particulière de ω pour laquelle le numérateur de Q_1 s'annule correspond à la situation d'antirésonance, pour laquelle l'énergie ne reste pas dans la boucle contenant la source.

2.3.2. OSCILLATEUR ÉLECTRIQUE À 2 DDL. COUPLAGE PAR INDUCTANCE MUTUELLE.

Les échanges d'énergie entre des oscillateurs électriques peuvent se faire par l'intermédiaire d'inductance mutuelle. C'est le cas dans les transformateurs de tension. Considérons le cas présenté sur la figure ci-après. Une source de tension sinusoïdale alimente une boucle comprenant un condensateur et une bobine. La bobine présente une inductance mutuelle avec une autre bobine insérée dans une 2^{ème} boucle en série avec un condensateur. Soient C_1 et C_2 les capacités des condensateurs, L_1 et L_2 les inductances, M l'inductance mutuelle



La loi des mailles appliquées aux deux boucles permet d'écrire :

$$\begin{cases} L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} + u_{C_1} = e(t) \\ u_{C_2} + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} = 0 \end{cases}$$

Utilisons la relation entre les courants et tensions des condensateurs pour réécrire les équations en fonction de tensions uniquement ($i_{1,2} = C_{1,2} \frac{du_{c_{1,2}}}{dt}$) :

$$\left\{ \begin{array}{l} L_1 C_1 \frac{d^2 u_{c_1}}{dt^2} + M C_1 \frac{d^2 u_{c_2}}{dt^2} + u_{c_1} = e(t) \\ u_{c_2} + L_2 C_2 \frac{d^2 u_{c_2}}{dt^2} + M C_2 \frac{d^2 u_{c_1}}{dt^2} = 0 \end{array} \right.$$

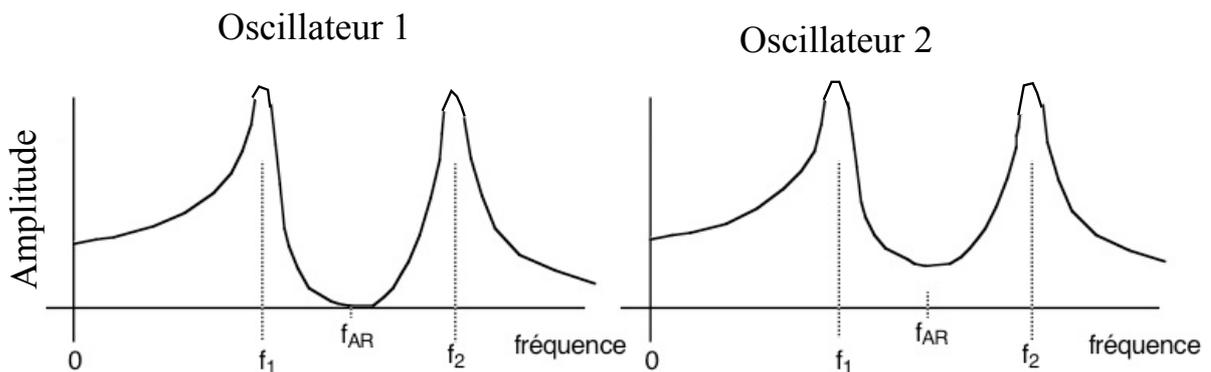
Dans le cas où la tension de la source est sinusoïdale ($e(t) = U \cos(\omega t)$) ou sous la forme complexe $\widetilde{e}(t) = U e^{j\omega t}$, la réponse (courants et tensions) dans les circuits se fera avec la même fréquence. On cherche donc des solutions sous la forme complexe suivante: $\widetilde{u}_{c_{1,2}}(t) = \overline{U}_{1,2} e^{j\omega t}$. Après introduction dans les équations ci-dessus, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} (1 - L_1 C_1 \omega^2) \overline{u}_{c_1} - M C_1 \omega^2 \overline{u}_{c_2} = U_0 e^{j\omega t} \\ -M C_2 \omega^2 \overline{u}_{c_1} + (1 - L_2 C_2 \omega^2) \overline{u}_{c_2} = 0 \end{array} \right.$$

La résolution de ce système est immédiate et donne (exprimé en réel):

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{c_1} = \frac{U_0 (1 - L_2 C_2 \omega^2)}{(1 - L_1 C_1 \omega^2)(1 - L_2 C_2 \omega^2) - M^2 C_1 C_2 \omega^4} \cos(\omega t) \\ u_{c_2} = \frac{U_0 M C_2 \omega^2}{(1 - L_1 C_1 \omega^2)(1 - L_2 C_2 \omega^2) - M^2 C_1 C_2 \omega^4} \cos(\omega t) \end{array} \right.$$

Les deux valeurs de la pulsation qui annulent le dénominateur des expressions correspondent aux fréquences propres. La valeur de ω qui annule la tension u_{c_1} correspond à l'antirésonance. Les amplitudes sont maximales (ici l'infini parce qu'on n'a pas tenu compte des pertes par effet Joule) ; la prise en compte des pertes mène à une évolution des amplitudes en fonction de la fréquence d'excitation présentant l'allure ci-après..



2.4. ANNEXES

2.4.1. MÉTHODE SIMPLIFIÉE DE RÉOLUTION DE L'ÉQUATION DE MOUVEMENT DU SYSTÈME DE 2 OSCILLATEURS COUPLÉS SYMÉTRIQUES. SYSTÈME MK

Considérons un système de 2 oscillateurs mécaniques du type masse-ressort (K, m) couplés par un ressort de raideur K_{12} . Le système est symétrique.

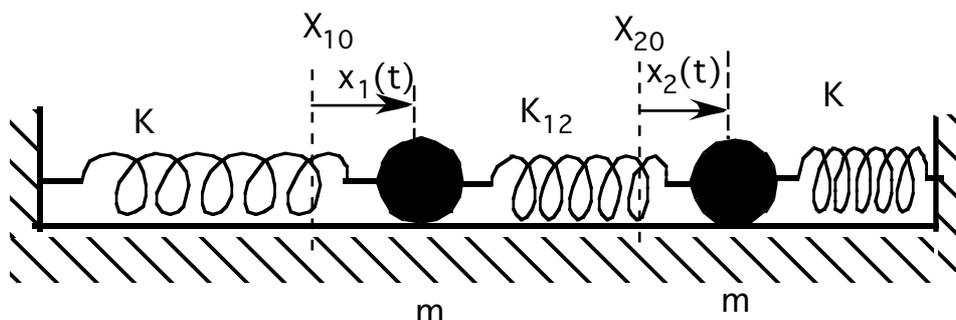


Fig. 3-18 : Système de 2 oscillateurs couplés symétriques. Un état quelconque du système est donné par les écarts $x_1(t)$ et $x_2(t)$ des masses par rapport à leurs positions d'équilibre respectives X_{10} et X_{20} .

Pour décrire l'état du système d'oscillateurs de la figure ci-dessus, il faut trouver les expressions des positions $x_1(t)$ et $x_2(t)$ des 2 masses. Pour cela on écrit le principe fondamental de la dynamique ($m \vec{\gamma} = \sum \vec{F}_{ext}$) pour chacune des 2 masses. On obtient :

$$(3.43) \quad (a) \quad m \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -Kx_1 - K_{12}(x_1 - x_2) \quad \text{ou} \quad m \frac{d^2 x_1}{dt^2} + (K + K_{12})x_1 - K_{12}x_2 = 0$$

$$(b) \quad m \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -Kx_2 - K_{12}(x_2 - x_1) \quad \text{ou} \quad m \frac{d^2 x_2}{dt^2} + (K + K_{12})x_2 - K_{12}x_1 = 0.$$

La résolution du système symétrique considéré ci-dessus peut se simplifier en utilisant les paramètres $S(t)$ et $D(t)$, somme et différence des déplacements des 2 masses. Pour cela écrivons les équations sous la forme :

$$(3.44) \quad \begin{cases} \frac{d^2 x_1}{dt^2} + a x_1 - b x_2 = 0 \\ \frac{d^2 x_2}{dt^2} + a x_2 - b x_1 = 0 \end{cases} \quad \text{avec} \quad a = \frac{K + K_{12}}{m} \quad \text{et} \quad b = \frac{K_{12}}{m}.$$

En posant :

$$(3.45) \quad D(t) = x_1 - x_2 \quad \text{et} \quad S(t) = x_1 + x_2.$$

En effet le système d'équations différentielles s'écrit alors :

$$(3.46) \quad \frac{d^2 D}{dt^2} + \omega_-^2 D = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2 S}{dt^2} + \omega_+^2 S = 0$$

$$\text{avec} \quad \omega_- = \sqrt{a+b} = \sqrt{\frac{K+2K_{12}}{m}} \quad \text{et} \quad \omega_+ = \sqrt{a-b} = \sqrt{\frac{K}{m}}.$$

Par analogie avec la résolution de l'équation de l'oscillateur libre non amorti à 1 degré de liberté, on voit que

$D(t)$ et $S(t)$ sont donc des fonctions sinusoïdales :

$$(3.47) \quad S(t) = S_0 \cos(\omega_+ t + \varphi_+) \text{ et } D(t) = D_0 \cos(\omega_- t + \varphi_-).$$

On trouve les positions des masses en passant de $\{ D(t), S(t) \}$ à $\{ x_1(t), x_2(t) \}$:

$$(3.48) \quad \begin{cases} x_1(t) = \frac{S+D}{2} = \frac{S_0}{2} \cos(\omega_+ t + \varphi_+) + \frac{D_0}{2} \cos(\omega_- t + \varphi_-) \\ x_2(t) = \frac{S-D}{2} = \frac{S_0}{2} \cos(\omega_+ t + \varphi_+) - \frac{D_0}{2} \cos(\omega_- t + \varphi_-) \end{cases}$$

- Les constantes de ces expressions (S_0, D_0, φ_+ et φ_-) sont obtenues à partir des conditions initiales (à $t=0$) choisies.

- Ces expressions montrent que les oscillations couplées ne sont en général pas sinusoïdales puisque la somme (ou différence) de 2 fonctions sinusoïdales de fréquences différentes n'est pas une sinusoïde.

- Le système symétrique est caractérisé par 2 modes : un mode antisymétrique et un mode symétrique.

Le mode antisymétrique est obtenu pour $D_0 = 0$ et $x_1(t) = x_2(t) = \frac{S_0}{2} \cos(\omega_+ t + \varphi_+)$ avec $\omega_+ = \omega_{pr.1} = \omega_{AS} = \sqrt{a-b} = \sqrt{\frac{K}{m}}$; les oscillateurs sont en phase.

Le mode symétrique est obtenu pour $S_0 = 0$ et $x_1(t) = -x_2(t) = \frac{D_0}{2} \cos(\omega_- t + \varphi_-)$ avec $\omega_- = \omega_{pr.2} = \omega_S = \sqrt{a+b} = \sqrt{\frac{K+2K_{12}}{m}}$; les oscillateurs sont en opposition de phase.

En conclusion, le système symétrique étudié ci-dessus se caractérise par deux fréquences propres données par

$$(3.49) \quad f_{pr.1} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{m}} \text{ et } f_{pr.2} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K+2K_{12}}{m}} .$$

2.4.2. EXEMPLES DE SYSTÈME D'OSCILLATEURS COUPLÉS

3.4.2.1. Le transducteur électrodynamique

Un exemple de transducteur électrodynamique est représenté sur la figure ci-après. Les haut-parleurs électrodynamiques et les microphones sont basés sur ce principe.

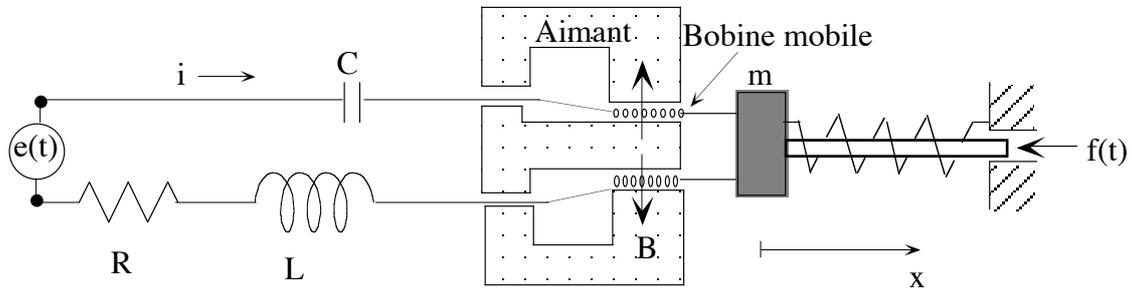


Fig. 3-19 : Transducteur électrodynamique.

Le dispositif comporte un aimant permanent créant un champ B dans un entrefer annulaire dans lequel est placée une bobine mobile. La bobine est reliée électriquement à un circuit RLC et mécaniquement à une masse m attachée à un support par l'intermédiaire d'un ressort de raideur K . Une tige fixée à la masse permet d'appliquer à celle-ci une force f . Dans le cas d'un haut-parleur le système est dit dynamique si l'aimant est permanent et électrodynamique si l'aimant est un électro-aimant.

3.4.2.2. L'atome

L'interaction d'une onde électromagnétique avec la matière se manifeste par des oscillations au sein des atomes. Il s'agit essentiellement d'oscillation des électrons, le noyau de l'atome restant quasiment immobile à cause de sa grande masse.

Un électron possède trois degrés de liberté et donc trois modes propres de vibration. Trois nombres quantiques sont utilisés pour désigner ces modes : n indique la position radiale de l'électron ; l est le nombre quantique orbital, m est le nombre quantique angulaire. En réalité l'électron présente une structure interne ; un nombre quantique supplémentaire, le spin s est nécessaire pour tenir compte de ce degré de liberté lié à la structure interne. La description des phénomènes qui se produisent à cette échelle doit être faite dans un cadre différent de celui utilisé dans le présent document.

3.4.2.3. La molécule d'eau

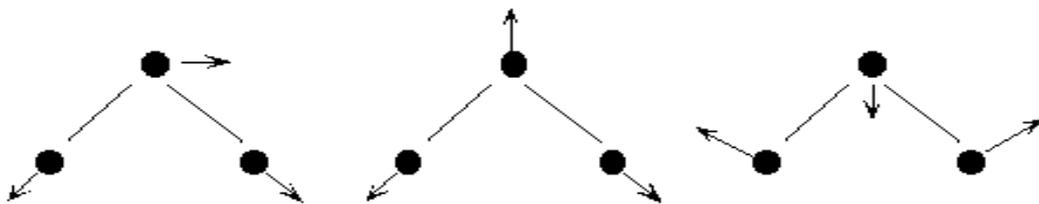


Fig. 3-20 : Les modes de vibration de la molécule d'eau.

La molécule se compose de trois atomes et possède donc neuf degrés de liberté. Chaque mode de vibration est désigné par un nombre quantique. Les fréquences propres se situent dans le domaine de l'infra-rouge, ce qui explique les phénomènes d'absorption de rayonnement observés à ces fréquences.

