

1. Oscillations : systèmes à un degré de liberté.

Vibrations libres. Vibrations forcées. Résonance.

1.1. EN PRÉAMBULE

Les phénomènes étudiés dans un cours sur les vibrations et les ondes concernent tous les domaines de la physique et de l'ingénierie. Si le cours s'intitule « **vibrations et ondes** » cela signifie qu'il y sera question de mécanique, d'acoustique, d'optique, d'électromagnétisme et que toutes les spécialités de l'ingénieur, auxquelles on peut ajouter l'architecture dans ses aspects structures et ouvrages, y trouveront un intérêt.

La notion principale utilisée dans un cours « vibrations et ondes » est l'**énergie**, grandeur à la fois intuitive et mystérieuse. Dans les situations de vibrations (ou d'oscillations) l'énergie est localisée dans un espace limité, assimilé à un point ou s'étendant dans un volume limité. Dans le cas des ondes, l'énergie se propage à partir d'une source qui est elle-même un oscillateur, pour aller se déposer dans la matière rencontrée, ou redirigée dans sa propagation. Suivant le cas, il sera question d'absorption, de réflexion, de diffusion, de diffraction, de dispersion. Comme toute vibration ou onde est une manifestation d'une forme d'énergie, on retrouve des notions communes quel que soit le domaine. L'ingénieur, quelle que soit sa spécialité, a besoin des notions suivantes introduites dans ce cours : fréquences propres, temps de relaxation, modes de vibration, interférence, vitesse de phase, vitesse de groupe, polarisation

A un niveau très général, on peut classer les phénomènes physiques en deux grandes catégories : mécanique et électrique. Dans le cas mécanique, les phénomènes sont régis par les lois de la gravitation et de l'inertie, en relation avec la masse des objets et le champ gravitationnel associé. Dans le cas électrique, c'est le champ électromagnétique lié à la propriété de charge électrique de certaines particules constituant la matière. En pratique, les systèmes que nous réalisons et que nous utilisons sont à la fois mécaniques et électriques, et l'étude des deux situations est utile à l'ingénieur, quelle que soit sa spécialité. Pour la clarté de l'exposé il convient de se placer soit dans un cas mécanique, soit dans un cas électrique. Les situations « mécaniques » sont relativement intuitives et assez faciles à « comprendre ». Les situations électriques le sont moins et sont le plus souvent basées sur la bonne application de conventions, qui si elles sont bien respectées, mènent au bon résultat, mais qui ne sont pas faciles à suivre à toutes les étapes.

1.2. L'ÉNERGIE ET SES MANIFESTATIONS COURANTES

L'**énergie** est une grandeur fondamentale en Physique. La **matière** et le **rayonnement électromagnétique** (ém) qui constituent la partie de l'univers que nous pouvons observer sont deux formes de cette entité fondamentale. Les développements de la physique au 20^{ème} siècle, stimulés par les idées du Physicien Einstein, ont fait apparaître une équivalence entre matière et rayonnement ém. Cette découverte est résumée dans la célèbre formule $E = mc^2$: une quantité de matière de masse m est caractérisée par une énergie E , c étant la célérité des ondes électromagnétiques dont la forme qui nous est la plus familière est la lumière.

L'énergie se manifeste sous de multiples formes. Les formes d'énergie suivantes interviennent dans les phénomènes de vibrations.

Énergie mécanique.

Énergie cinétique de translation : $E_{ct} = \frac{1}{2}mv^2$ est l'énergie d'un objet de masse m se déplaçant en ligne droite à la vitesse constante v dans un repère donné.

Énergie cinétique de rotation : $E_{cr} = \frac{1}{2} I \omega^2$ est l'énergie cinétique de rotation d'un objet de moment cinétique I et de vitesse angulaire ω .

Énergie potentielle de déformation : $E_p = \frac{1}{2} K x^2$ est la variation d'énergie potentielle de déformation d'un objet élastique allongé du type ressort, de raideur K , dont la longueur a varié d'une quantité x .

Énergie thermique : $Q = m C_{th} \Delta T$ est la quantité d'énergie thermique (ou chaleur) d'un corps de masse m , dont la température a varié de ΔT degrés. C_{th} est la capacité thermique.

Énergie potentielle de pesanteur : $\Delta E_{pp} = m g \Delta z$ est la variation d'énergie potentielle de pesanteur d'un corps de masse m soumis à la pesanteur terrestre et dont l'altitude (sur une petite distance) varie de Δz ($g = 9,81 \text{N.kg}^{-1}$).

Énergie électrique :

Énergie du champ électrique créée par des charges q stockée dans un condensateur : $E_{el} = \frac{1}{2} C u^2 = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$; C est la capacité du condensateur, u la tension à ses bornes.

Énergie magnétique dans une bobine d'inductance L traversée par un courant d'intensité i : $E_{magn} = \frac{1}{2} L i^2$.

Les systèmes étudiés dans un cours sur les **vibrations** correspondent aux situations dans lesquelles une partie de l'énergie varie périodiquement d'une forme à une autre : de cinétique à potentielle dans les systèmes mécaniques, d'électrique à magnétique dans les systèmes électriques. L'énergie reste localisée si le système est isolé. Dans le cas contraire, l'énergie s'échappe vers les éléments voisins et se propage dans le milieu environnant sous la forme d'**ondes**.

1.3. L'OSCILLATEUR LINÉAIRE À 1 DEGRÉ DE LIBERTÉ

1.3.1. CLASSIFICATION DES OSCILLATEURS

Suivant les conditions dans lesquelles on le place, un système pourra osciller librement ou de façon forcée.

- les oscillations libres : le système est mis en mouvement par une perturbation initiale (se traduisant par un apport d'énergie) qui dure un bref instant, et, livré à lui-même, revient périodiquement à la position d'équilibre,

- les oscillations forcées : l'excitation est permanente, le système reçoit un flux continu d'énergie qu'il accumule en partie, transforme et/ou restitue au milieu environnant.

On classe les systèmes oscillants suivant leur niveau de complexité. Il convient pour cela de définir le nombre de paramètres nécessaires pour le décrire.

Les **systèmes oscillants** les plus **simples** et isolés ont un seul **degré de liberté** et sont décrits à l'aide d'un paramètre unique. Ce paramètre correspond à l'écart par rapport à la situation de repos ou d'équilibre autour de laquelle se fait l'oscillation.

- en mécanique, il s'agit d'une translation suivant un axe ou d'une rotation,

- dans les systèmes électriques il peut s'agir d'un courant de bobine, d'une charge de condensateur, d'un champ électrique, d'une induction magnétique.

Les systèmes complexes à plusieurs **degrés de liberté** : Un système est complexe s'il est constitué d'un grand nombre de parties en mouvement pouvant évoluer de façon interdépendantes. A chaque type de mouvement correspond un degré de liberté. Un mouvement quelconque peut être considéré comme formé d'un ensemble de mouvements simples ou **modes** dont les propriétés sont celles d'un oscillateur harmonique.

1.3.2. L'OSCILLATEUR À 1 DDL

Un système physique se comporte en **oscillateur à 1 degré de liberté** si son état (position, énergie, ...) peut être décrit à l'aide d'un seul paramètre. Ses particularités sont :

- un état d'équilibre stable,

- des phénomènes de rappel vers la position d'équilibre s'il en est écarté par des sollicitations extérieures,

- deux formes d'énergie avec échange périodique.

Une excitation brève se traduit par une oscillation périodique autour de l'équilibre. Si T est la période du phénomène et $s(t)$ l'écart par rapport à l'équilibre [On utilise fréquemment le symbole ψ], on a : $s(t) \equiv s(t+T) \equiv s(t+2T) \equiv \dots \equiv s(t+nT)$.

Un oscillateur mécanique est constitué de deux éléments :

- un composant inertiel, capable de stocker de l'énergie cinétique,

- un composant élastique, capable d'emmagasiner de l'énergie potentielle élastique et capable de ramener le système vers sa position d'équilibre.

C'est le cas pour les deux dispositifs suivants (figure ci-après).

- mouvement vibratoire de translation : un objet ponctuel de masse m accroché à un ressort de raideur K , lui-même fixé à un bâti rigide, immobile dans un repère galiléen (système $m-K$),

- mouvement vibratoire de rotation : un disque fixé à une tige élastique fixée à un bâti rigide, en rotation autour de l'axe de la tige.

Un autre cas d'oscillateur mécanique à 1 ddl est le pendule, pour lequel c'est le champ de pesanteur qui exerce l'action de rappel.

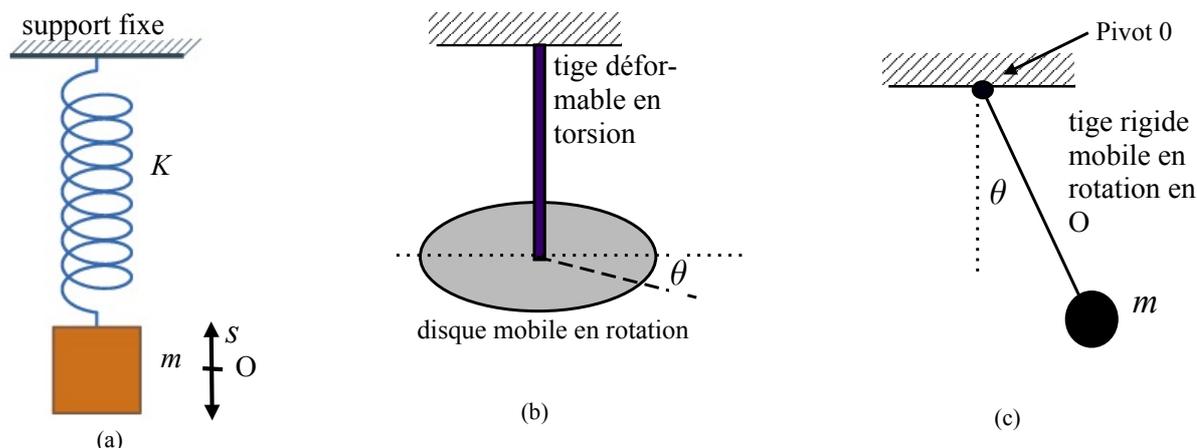


Fig. 1-1 : Exemples d'oscillateurs mécaniques simples à 1ddl. (a) Oscillateur en translation, (b) oscillateur en rotation, (c) pendule. s et θ sont les écarts par rapport à la situation d'équilibre.

L'oscillateur est dit **linéaire** si l'action de rappel vers l'état d'équilibre est proportionnelle à l'écart par rapport à cet état. Pour le ressort du système m-K cela signifie que la force de rappel s'écrit $F_{rap} = -Ks$. Cette hypothèse est vraie en général pour les petits écarts. Si la déformation augmente le système devient non linéaire et la force de rappel s'écrit : $F_{rap} = -K_1s - K_2s^2 - K_3s^3 - \dots$

Les systèmes linéaires ont la propriété de vérifier le **principe de superposition** : la réponse du système à plusieurs forces extérieures est la somme des réponses aux forces prises séparément. Dans la suite nous considérons des systèmes dans le régime linéaire.

L'oscillateur électrique élémentaire à un ddl est constitué d'un condensateur, d'une bobine et d'une résistance.

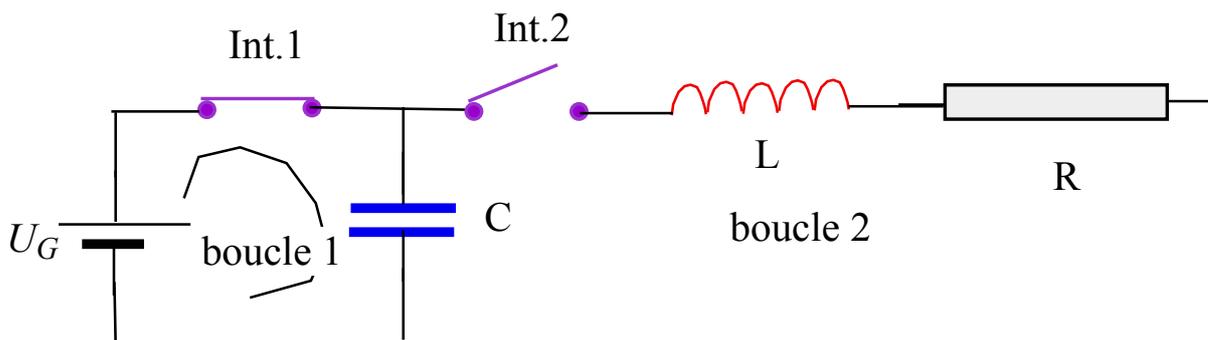


Fig. 1-2 : Oscillateur électrique élémentaire RLC (1ddl) : La boucle 2 du circuit présente des oscillations du courant lorsque l'interrupteur 2 est fermé, à un moment où le condensateur C est chargé.

1.4. L'OSCILLATEUR MÉCANIQUE EN TRANSLATION À 1DDL EN RÉGIME LIBRE

1.4.1. DESCRIPTION DE L'OSCILLATEUR

Considérons l'oscillateur mécanique constitué d'un objet ponctuel (O) de masse m fixée à un ressort de longueur à vide X_0 et de raideur K et pouvant glisser sur une surface horizontale. Le ressort est supposé idéal, c'est-à-dire de masse négligeable par rapport à la masse m qui est fixée à l'une de ses extrémités.

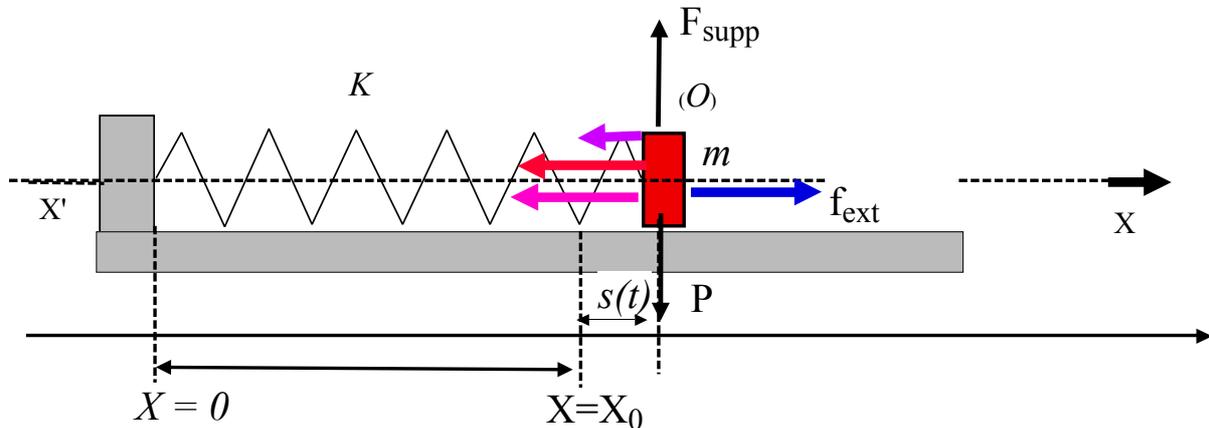


Fig. 1-3 : Oscillateur m-K. Les forces en présence lorsqu'une force extérieure écarte le système hors de sa position d'équilibre.

À l'équilibre (O) se trouve à la position X_0 . Si une force extérieure F_{ext} agit sur (O), celui-ci s'écarte de sa position d'équilibre. Soit $s(t)$ cet écart à un instant t .

1.4.2. BILAN DES FORCES D'UN OSCILLATEUR M-K

Les forces qui s'appliquent sur (O) sont les suivantes.

- son poids P compensé par la force de réaction du support F_{supp} considéré ici à l'horizontale. Ces deux forces agissent perpendiculairement à la direction du déplacement et n'influencent donc pas le comportement dynamique de l'oscillateur.

Remarque : Si la direction de déplacement $X'X$ est différente de l'horizontale, la position d'équilibre est modifiée et on prendrait comme origine des déplacements cette autre position d'équilibre.

Les forces agissant dans la direction de déplacement sont :

- la force de rappel $F_{rap} = -K s$;

Remarque : Le signe (-) que le rappel se fait dans le sens opposé à l'écart (si s est positif, la force agit dans le sens des x négatifs)

- la force d'inertie $F_{in} = -m\gamma = -m \frac{d^2 s}{dt^2}$;

- la force de frottement $F_{frott} = -h v = -h \frac{ds}{dt}$;

v est la vitesse instantanée, h , le coefficient de frottement. Cette expression correspond au cas d'un frottement dit visqueux ou liquide, ce qui est en général le cas en pratique.

- la force extérieure F_{ext} .

En appliquant le principe fondamental de la dynamique ($\sum \vec{F} = \vec{0}$) on obtient :

$$-m \frac{d^2 s}{dt^2} - h \frac{ds}{dt} - K s + F_{ext} = 0 \text{ ou}$$

$$(1.1) \quad m \frac{d^2 s}{dt^2} + h \frac{ds}{dt} + K s = F_{ext} .$$

1.4.3. SYSTÈME LIBRE SANS PERTES : OSCILLATION HARMONIQUE SIMPLE (OHS)

Considérons le cas simplifié de l'oscillateur pour lequel les frottements seraient négligeables ($h=0$). Si (O) est écarté de son état d'équilibre d'une quantité $s(t=0) = A$ puis libéré, on observera le régime d'oscillations dites libres. L'équation différentielle s'écrit alors :

$$(1.2) \quad m \frac{d^2 s}{dt^2} + K s = 0 .$$

Pour résoudre cette équation et trouver l'expression de $s(t)$, écrivons l'équation sous la forme suivante :

$$(1.3) \quad \frac{d^2 s}{dt^2} + \omega_0^2 s = 0 .$$

Cette écriture utilise le terme $\omega_0 = \sqrt{K/m}$ dont le sens apparaît plus loin.

1.4.3.1. RÉOLUTION DE L'ÉQUATION DE L'OSCILLATEUR LIBRE NON AMORTI À L'AIDE DES NOMBRES COMPLEXES.

Le système oscillant à 1 degré de liberté et sans amortissements considéré ci-dessus nous a mené à l'équation différentielle suivante : $\frac{d^2 s(t)}{dt^2} + \omega_0^2 s(t) = 0$.

On voit que le paramètre s (écart par rapport à la position d'équilibre) et sa dérivée temporelle du second ordre se combinent de façon linéaire pour donner 0. La **fonction exponentielle** a cette propriété ; il est donc logique de chercher des solutions de la forme :

$$s(t) = C e^{rt}$$

où C est une constante et r une grandeur en s^{-1} . (rt une grandeur sans dimension). Après remplacement dans l'équation différentielle, on a :

$$C r^2 e^{rt} + C \omega_0^2 e^{rt} = 0 .$$

Cette équation est vérifiée pour tout C et à un instant t quelconque à la condition suivante :

$$r^2 + \omega_0^2 = 0, \text{ soit } r^2 = -\omega_0^2 \text{ ou encore } r = \pm j\omega_0 .$$

La solution de l'équation différentielle s'écrit donc :

$$s(t) = C^+ e^{j\omega_0 t} + C^- e^{-j\omega_0 t} .$$

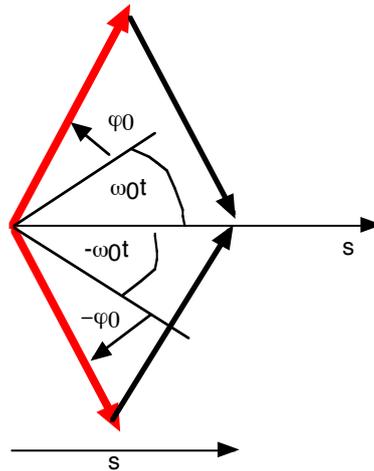


Fig. 1-4 : La solution complexe de l'équation différentielle en représentation du vecteur tournant.

En utilisant la représentation du vecteur tournant présentée en annexe, on voit que la somme des deux termes de la solution proposée correspond à une oscillation harmonique suivant un axe en prenant $C^+ = C^-$. On voit aussi qu'on peut généraliser en prenant la grandeur complexe, $\widetilde{C}^\pm = C e^{\pm j\varphi_0}$. La solution générale devient alors :

$$\widetilde{s}(t) = \widetilde{C}^+ e^{j\omega_0 t} + \widetilde{C}^- e^{-j\omega_0 t}$$

ou encore, sous la forme réelle :

$$(1.4) \quad s(t) = C \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

C et φ_0 sont des constantes qui dépendent des conditions initiales (à $t=0$).

Si les conditions initiales sont telles que décrites plus haut (l'objet (O) est libéré sans vitesse initiale d'un écart A), la solution devient :

$$(1.5) \quad s(t) = A \cos(\omega_0 t).$$

Le mouvement est donc sinusoïdal ; l'oscillateur est dit harmonique.

1.4.3.2. PARAMÈTRES DE L'OSCILLATEUR HARMONIQUE

Il existe au moins deux raisons à l'étude des oscillations harmoniques des systèmes à 1 degré de liberté.

La *première raison est physique* : un grand nombre de vibrations suit une variation sinusoïdale, par exemple dans tous les systèmes mécaniques légèrement déplacés de leur position d'équilibre ; c'est en fait presque toujours le cas lorsque l'amplitude est petite, l'**amplitude** étant définie comme la valeur maximale de la grandeur caractéristique (élongation, rotation, déplacement, ...).

La *deuxième raison est mathématique* ; elle est due à la découverte de Fourier (1807) : « Toute perturbation qui se répète de façon périodique avec une période T , peut être considérée comme la superposition de vibrations purement sinusoïdales de période T , $T/2$, $T/3$, ... La vibration à la période T est la vibration fondamentale, les autres sont des harmoniques. Les amplitudes des diverses vibrations dépendent de la perturbation considérée».

Le paramètre $s(t)$ d'un oscillateur libre non amorti s'écrit :

$$s(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

La grandeur caractéristique est $\omega_0 = \sqrt{K/m}$ (rad.s⁻¹), la **pulsation propre** ou fréquence angulaire. Les autres grandeurs qui en dépendent sont :

- la fréquence propre $f_0 = \frac{1}{2\pi} \omega_0$ (Hz) et

- la période propre des oscillations $T_0 = \frac{1}{f_0} = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{m/K}$ (s).

A, l'**amplitude** de l'oscillation, correspond à l'écart maximal par rapport à la position d'équilibre.

La grandeur $\Phi = \omega_0 t + \varphi_0$ est appelée 'angle de phase' ou **phase**.

φ_0 est la phase à l'instant $t=0$ pris origine (ou phase initiale), dépend des **conditions initiales** du mouvement (position et vitesse à $t=0$). Si à $t = 0$ les système est dévié de sa position d'équilibre et la vitesse est nulle, alors $\varphi_0 = 0$.

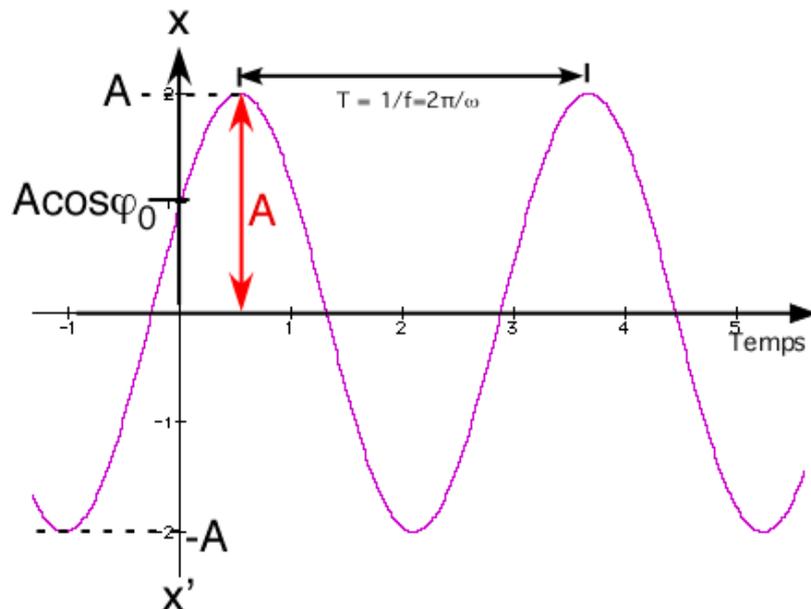


Fig. 1-5 : Oscillation sinusoïdale (ou harmonique) $s(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$. L'intervalle de temps T entre deux passages successifs par le maximum est la période d'oscillation T_0

1.4.3.3. VITESSE ET ACCÉLÉRATION DE L'OSCILLATEUR

La vitesse est obtenue en dérivant la position $s(t)$:

$$v(t) = \frac{ds(t)}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = A\omega_0 \cos\left(\omega_0 t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right)$$

La valeur maximale (ou amplitude) de la vitesse est donc $V = \omega_0 A$. Le déphasage entre vitesse et position est de $\pi/2$. La représentation vectorielle est montrée ci-après.

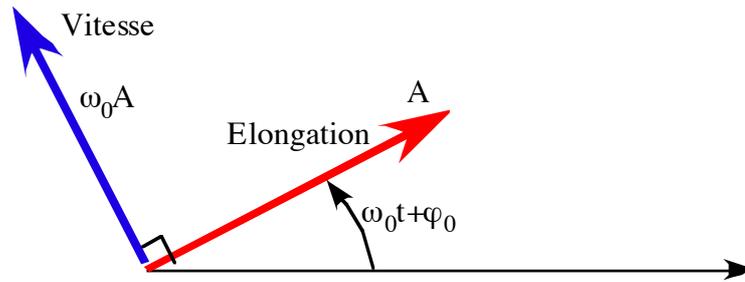


Fig. 1-6 : Représentation vectorielle de l'élongation et de la vitesse d'un oscillateur

L'accélération est obtenue en dérivant la vitesse :

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = -\omega_0^2 s(t).$$

Remarque : Il apparaît que l'accélération est proportionnelle à la position. Cette relation est utilisée en pratique pour obtenir la variation de la position d'un objet oscillant à partir de la mesure de son accélération.

1.4.3.4. RELATION ENTRE LES CONDITIONS INITIALES ET LES PARAMÈTRES D'OSCILLATION

Soit un corps subissant un mouvement périodique défini par la distance $s(t)$ du corps à sa position d'équilibre $s(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$:

- la 'position' est comprise entre $-A$ et $+A$ sur un axe $x'Ox$ (l'origine de l'axe est la position d'équilibre),
- la période du mouvement est $T = 2\pi/\omega_0$.

La situation à $t=0$ est bien définie avec $s(t=0) = S_0$ et $ds/dt = V_0$ à cet instant sont connus. On peut écrire

$$s(0) = S_0 = A \cos \varphi_0 \text{ et } V_0 = -\omega_0 A \sin \varphi_0.$$

En connaissant S_0 et V_0 il est donc possible de déterminer l'amplitude et la phase initiale d'un mouvement harmonique simple dont la pulsation ω_0 est connue :

$$(1.6) \quad A = \sqrt{S_0^2 + \left(\frac{V_0}{\omega_0}\right)^2} \text{ et } \tan(\varphi_0) = -\frac{V_0}{\omega_0 S_0}.$$

Les deux cas particuliers de conditions initiales sont :

- l'impulsion initiale avec $s(0) = 0$ et ds/dt (à $t=0$) = V_0 et
- le 'lâcher' : $s(0) = A$ et $V_0 = 0$.

Un mouvement réel ne pouvant en pratique durer qu'un temps limité à cause des pertes par frottements, l'équation ne peut décrire une vibration réelle qu'avec une certaine approximation.

1.4.3.5. REPRÉSENTATION DE L'OSCILLATEUR HARMONIQUE DANS L'ESPACE DE PHASE

L'espace de phase est constitué d'un repère ayant pour coordonnées l'amplitude du mouvement et sa dérivée par rapport au temps (c'est-à-dire la vitesse vibratoire). Une trajectoire de phase d'un mouvement vibratoire est sa représentation dans l'espace de phase pour des conditions initiales (position et vitesse) données. Une période d'un mouvement périodique est représentée par une ligne fermée. Pour un oscillateur harmonique, l'amplitude étant donnée par $s(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ la dérivée temporelle s'écrit :

$$(1.7) \quad \frac{ds}{dt} = v(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

Un cycle du mouvement se traduit dans l'espace des phases par une ellipse d'équation :

$$(1.8) \quad \frac{s^2}{A^2} + \frac{v^2}{A^2\omega_0^2} = 1$$

L'amplitude A est le paramètre caractéristique de la courbe de l'espace de phase.

Pour un mouvement plus compliqué d'ordre n (n = nombre de translations et de rotations), l'espace des phases est défini par n positions et n vitesses.

1.4.3.6. ÉNERGIE DE L'OSCILLATEUR MÉCANIQUE NON AMORTI

Les deux formes d'énergie de l'oscillateur

Un oscillateur est qualifié de non-amorti ou conservatif, si la diminution de l'amplitude au cours du temps, due aux phénomènes de dissipation de l'énergie sous forme de chaleur, est inférieure à la sensibilité des instruments. Dans le système masse-ressort, l'énergie totale est la somme

- de l'énergie cinétique de la masse et de
- l'énergie potentielle de déformation (compression ou extension) du ressort.

En écrivant l'élongation sous la forme $s(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$, on a les valeurs suivantes pour l'énergie cinétique et l'énergie potentielle instantanée pour un écart s par rapport à la position d'équilibre :

$$(1.9) \quad \begin{aligned} E_{cin}(t) &= \frac{1}{2} m v^2(t) = \frac{1}{2} m \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} m (-A \omega_0)^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) = \frac{1}{2} A^2 K \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) \end{aligned}$$

L'énergie potentielle est obtenue en calculant le travail de la force exercée par le ressort, soit l'équation :

$$(1.10) \quad \begin{aligned} E_{pot}(t) = E_{pot}(s) &= - \int_0^s (-Kx) dx = \frac{1}{2} Ks^2 \quad \text{soit ici :} \\ E_{pot}(t) &= \frac{1}{2} K A^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) \end{aligned}$$

L'énergie totale E du système pour un écart quelconque s est égale à la valeur maximale de l'une et l'autre de ces expressions qui sont égales pour des raisons évidentes de conservation de l'énergie :

$$(1.11) \quad E_{tot} = \frac{1}{2} KA^2 [\cos^2(.) + \sin^2(.)] = \frac{1}{2} KA^2 = \frac{1}{2} m\omega_0^2 A^2 = const.$$

NB : L'énergie est proportionnelle au carré de l'amplitude. Ce résultat est valable quel que soit le type de vibration considérée.

Approche énergétique pour décrire un mouvement vibratoire. Méthode de Rayleigh de détermination de la fréquence propre

L'équation différentielle obtenue à partir de l'énergie

Soit une masse en oscillation au bout d'un ressort idéal de raideur K et se déplaçant suivant un axe $x'Ox$. S'il est possible de considérer que la masse du système est concentrée au bout d'un ressort à

réponse linéaire, l'équation de mouvement peut être obtenue à partir de la loi de conservation de l'énergie mécanique totale E :

$$(1.12) \quad \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} K s^2 = E = \text{Const}, \text{ ou } \frac{d(E_{cin} + E_{pot})}{dt} = 0$$

avec s , l'écart par rapport à la position d'équilibre. On peut retrouver la forme différentielle $m \frac{d^2 s}{dt^2} + K s = 0$ en calculant la dérivée ci-dessus.

Oscillateur m-K à masse répartie

Il est possible de déterminer ω_0 en utilisant le principe de conservation de l'énergie. Cette méthode, dite de Rayleigh permet de prendre en considération les inerties de toutes les masses en mouvement, y compris celle du ressort si celle-ci n'est pas négligeable devant la masse en oscillation.

Hypothèses utilisées :

- la déformée dynamique est voisine de la déformée statique.
- le mouvement est décrit par $s(t) = x = A \cos(\omega_0 t)$.

On écrit qu'à $s = 0$, toute l'énergie est sous forme cinétique et qu'à $x = A$, toute l'énergie est sous forme potentielle, soit : $E_{cin}(0) = E_{pot}(A)$. On ajoute la condition

$E_{Tot} = \text{constante}$ ou (ce qui revient au même)

$$(1.13) \quad \frac{d}{dt}(E_{cin} + E_{pot}) = 0.$$

Exemple : Utilisation de la méthode de Rayleigh pour prendre en compte la masse du ressort dans le système masse-ressort.

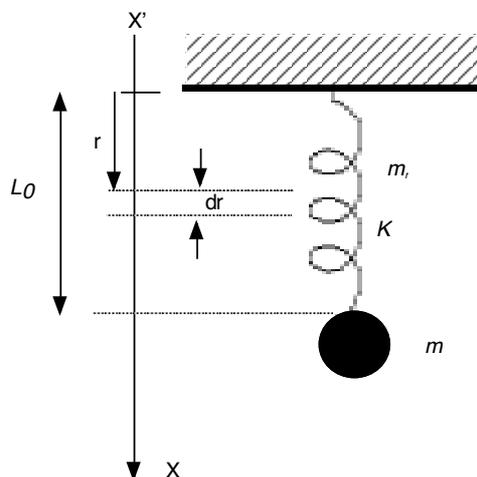


Fig. 1-7 : Oscillateur avec ressort de masse non négligeable

Soit un oscillateur du type Masse-Ressort dans lequel la masse du ressort n'est pas négligeable (fig. ci-dessus). Si la masse linéique du ressort est μ , sa masse totale est égale à : $m_r = \mu L_0$, L_0 étant la longueur à l'équilibre. Calculons les énergies.

$$(1.14) \quad E_{pot}(A) = \frac{1}{2} K A^2$$

$$(1.15) \quad E_{cin} = \frac{1}{2} m v^2 + E_{cin}(\text{ressort})$$

Soit l'élément de ressort de longueur dr et de masse μdr , défini par sa position r sur l'axe $x'x$. Un déplacement $s(t)$ de la masse m entraîne une déformation du ressort correspondant à un déplacement dr donné par $\frac{s(t)}{L_0} r$.

L'énergie cinétique maximale d'un élément de ressort dr (masse μdr), situé à la distance r du support est donné par :

$$dE_{cin} = \frac{1}{2} (\mu dr) \left(A \omega_0 \frac{r}{L_0} \right)^2 \text{ puisque sa vitesse maximale est égale } A \omega_0 \frac{r}{L_0}.$$

Il en résulte que l'énergie cinétique totale à l'élongation maximale est égale à :

$$E_{cin} = \frac{1}{2} m A^2 \omega_0^2 + \frac{1}{2} \int_0^{L_0} \mu \left(A \omega_0 \frac{r}{L_0} \right)^2 dr = \frac{1}{2} A^2 \omega_0^2 \left(m + \frac{m_r}{3} \right).$$

On part donc de l'équation $\frac{1}{2} A^2 \omega_0^2 \left(m + \frac{m_r}{3} \right) = \frac{1}{2} K A^2$ pour déduire ω_0 :

$$(1.16) \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m + \frac{m_r}{3}}}.$$

Remarques :

1 - La masse répartie du ressort intervient comme si $\frac{1}{3}$ de sa valeur s'ajoutait à la masse m . Les résultats restent valables même si $m_r \approx m$ (1 à 2% d'écart). Si $m \approx 0$, l'hypothèse d'un allongement proportionnel à la distance à l'extrémité fixe, n'est plus valable et l'écart devient plus important, de 5 à 10%.

2 - Pour les inerties réparties en torsion, on trouve le même résultat.

1.4.4. OSCILLATIONS MÉCANIQUES AMORTIES

1.4.4.1. MODÉLISATION DE L'OSCILLATEUR AMORTI SIMPLE

La mise en équation d'un mouvement oscillatoire passe par une phase de modélisation dans laquelle on cherche à simplifier. Les systèmes oscillants, bien que variés présentent des analogies. Il s'agit dans chaque cas de trouver la raideur équivalente, la masse ou l'inertie équivalente.

Dans un système physique réel, il y a toujours

- des frottements qui s'opposent au mouvement dans les systèmes mécaniques et
- des résistances qui s'opposent au passage du courant dans les systèmes électriques. Il en résulte un **amortissement** des oscillations qui a pour effet de diminuer la quantité d'énergie présente dans le système en la convertissant en chaleur. Le système est alors dit **dissipatif**. L'énergie dans le système diminue de façon non réversible.

L'analyse d'un problème de vibration passe par une simplification dans laquelle les éléments essentiels de l'oscillateur sont identifiés. On ramène si possible le système à un ensemble de 3 éléments pour chaque degré de liberté :

- l'élément élastique (symbole K)
- une masse équivalente m (aux masses réparties ou ponctuelles),

- des frottements dans les liaisons entre les divers éléments du système ou interne à la structure ; les frottements se traduisent par une force qui s'oppose au mouvement et proportionnelle à la vitesse instantanée ($F_{frott} = -h v$).

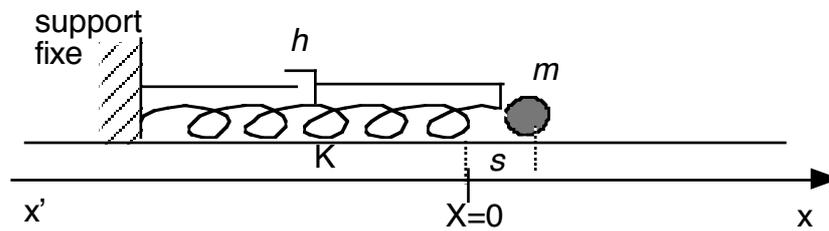


Fig. 1-8 : Représentation d'un système masse-ressort, amorti par le frottement (Modèle mkh). L'état de l'oscillateur est défini par l'écart s de la masse par rapport à une position d'origine $X=0$ correspondant à la position d'équilibre statique.

1.4.4.2. L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DANS LE CAS D'UN FROTTEMENT VISQUEUX

Dans un système masse-ressort (figure ci-dessus), les frottements visqueux provoquent une force proportionnelle et opposée en sens à la vitesse :

$$(1.17) \quad F_f = -h v = -h \frac{ds}{dt}, \quad h \text{ étant le coefficient de frottement. L'équation de mouvement dérivée}$$

de la loi de Newton s'écrit alors :

$$(1.18) \quad m \frac{d^2s}{dt^2} = -h \frac{ds}{dt} - Ks \quad \text{ou}$$

$$(1.19) \quad \frac{d^2s}{dt^2} + \frac{h}{m} \frac{ds}{dt} + \frac{K}{m} s = 0$$

Le mouvement suit donc une variation obtenue par résolution d'une équation pouvant être écrite sous la forme canonique suivante :

$$(1.20) \quad \frac{d^2s}{dt^2} + 2\beta \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = 0 ;$$

$\beta = \frac{h}{2m}$ est un **coefficient** qui caractérise la **décroissance de l'oscillation** en raison des frottements.

$\omega_0 = \sqrt{K/m}$ est la pulsation propre de l'oscillateur non amorti.

Une autre forme canonique possible est la suivante :

$$(1.21) \quad \frac{d^2s}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = 0$$

dans laquelle on a introduit un coefficient (ou facteur) Q dit de **qualité** :

$$(1.22) \quad Q = \frac{\omega_0}{2\beta} \text{ dont la signification apparaîtra plus loin.}$$

On cherche une solution sous la forme suivante :

$$(1.23) \quad s(t) = C \cdot e^{rt}.$$

Après remplacement dans l'équation différentielle on obtient l'équation caractéristique pour r :

$$(1.24) \quad r^2 + 2\beta r + \omega_0^2 = 0.$$

Les solutions de cette équation du second degré sont complexes et dépendent de la valeur ($-$, 0 ou $+$) du discriminant réduit $\Delta' = \beta^2 - \omega_0^2$ et en fait de l'importance du terme d'amortissement.

On distingue 3 types de réponses en fonction de β :

- $\beta < \omega_0$ (faible amortissement), régime de pseudo-oscillations dans lequel on observe des oscillations mais avec une amplitude qui décroît dans le temps.
- $\beta = \omega_0$, le système après avoir été écarté de la position revient en un minimum de temps sans osciller.
- $\beta > \omega_0$ (grand amortissement), la réponse à une excitation est apériodique, le système n'oscille pas.

Remarque : D'autres écritures du coefficient d'amortissement sont possibles, par exemple:

$\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{\gamma}{m} \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = 0$ [Benson.3-09]. Le coefficient β présente l'avantage d'une interprétation simple de la courbe de réponse temporelle.

1.4.4.3. RÉGIME OSCILLATOIRE AMORTI OU PSEUDOPÉRIODIQUE

Le discriminant de l'équation caractéristique est négatif $\beta < \omega_0$ (et $Q > \frac{1}{2}$) ; ce cas correspond à un amortissement faible. Cette condition amène à un régime d'oscillation dans lequel une périodicité apparaît, mais avec une amplitude qui décroît dans le temps; la réponse n'est donc plus harmonique.

Les deux racines de l'équation caractéristique s'écrivent alors :

$$(1.25) \quad r_{1,2} = -\beta \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}.$$

On pose $\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{K}{m} - \frac{h^2}{4m^2}}$ ce qui entraîne que $r_{1,2} = -\beta \pm j \omega_p$.

La solution de l'équation différentielle s'écrit alors :

$$(1.26) \quad s(t) = e^{-\beta t} [C_1 \cos(\omega_p t) + C_2 \sin(\omega_p t)]$$

qu'il est plus pratique d'écrire sous la forme (les coefficients s'interprètent facilement) :

$$s(t) = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega_p t + \varphi_0).$$

(Une expression en sinus convient également, cela modifie simplement la constante φ_0).

ω_p est la pulsation propre de l'oscillateur amorti (ou pseudo-pulsation) : le système passe périodiquement par la position d'équilibre, mais avec une amplitude d'oscillation qui décroît d'une période à l'autre. φ_0 et A_0 sont respectivement la phase et l'amplitude initiales (à $t=0$) ; ces deux paramètres dépendent des conditions choisies à cet instant.

Le mouvement amorti peut être aussi caractérisé par sa fréquence propre appelée pseudo fréquence

$$f_p = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \quad \text{ou sa période } T_p = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \quad (\text{pseudo période}).$$

En utilisant le coefficient de qualité introduite plus haut, la pseudo-pulsation s'écrit :

$$(1.27) \quad \omega_p = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}.$$

ω_0 et ω_p peuvent être confondues en pratique pour un amortissement faible (et donc Q grand).

Il en résulte pour la pseudo-période :

$$(1.28) \quad T_p = \frac{2\pi}{\omega_p} = T_0 \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}.$$

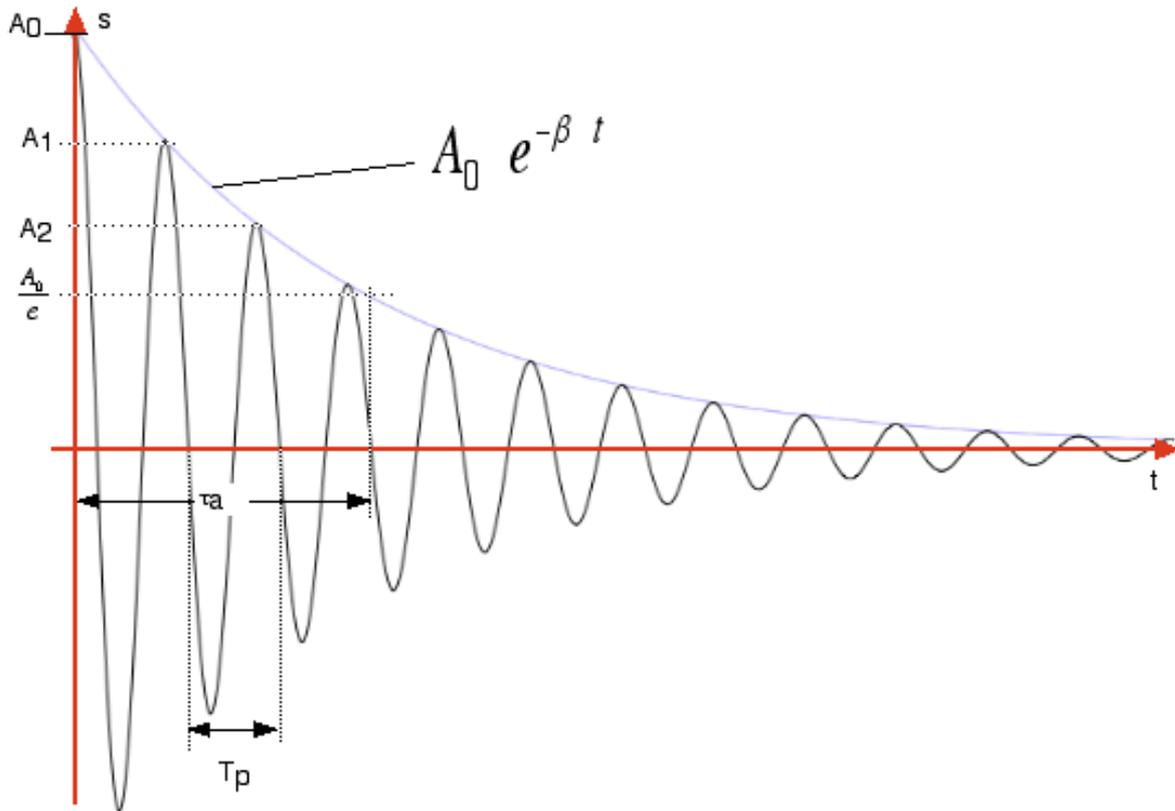


Fig. 1-9 : **Amplitude d'un oscillateur amorti en fonction du temps.**

$T_p = \frac{2\pi}{\omega_p}$ est la pseudo-période. τ_a est la constante de temps de décroissance de l'amplitude

L'amplitude d'oscillation décroît de façon exponentielle avec un **facteur de décroissance** β .

Remarque : Les maxima ne se trouvent pas exactement à mi-chemin entre les 'zéros'.

La grandeur $\tau_a = 1/\beta$ une **constante de temps** (ou **temps de relaxation** en amplitude) qui caractérise la décroissance de l'amplitude de la vibration, indique le temps nécessaire pour que l'amplitude passe de $A_{\max} = A_0$ à $t=0$ à $A_{\max}/e = 0,37 A_{\max}$ à $t = \tau_a$). D'un point de vue expérimental, β peut obtenu en relevant les valeurs maximales successives de l'amplitude et l'application de la relation :

$$(1.29) \quad \beta = \frac{-1}{t_2 - t_1} \ln \left(\frac{A_2}{A_1} \right).$$

On utilise aussi parfois le *décrément logarithmique* δ comme paramètre caractéristique de la décroissance de l'oscillation :

$$(1.30) \quad \delta = \ln \left(\frac{A_n}{A_{n+1}} \right) = \beta T_p = \frac{T_p}{\tau_a} = \frac{\omega_0}{2Q} T_p = \frac{2\pi}{\sqrt{4Q^2 - 1}}.$$

La mesure du décrement logarithmique permet d'accéder au coefficient de qualité de l'oscillateur.

1.4.4.4. REPRÉSENTATION D'UN OSCILLATEUR AMORTI DANS L'ESPACE (OU PLAN) DE PHASE

L'amplitude d'un oscillateur amorti variant dans le temps, la courbe représentative de l'espace de phase n'est plus fermée, mais se rapproche progressivement de l'origine.

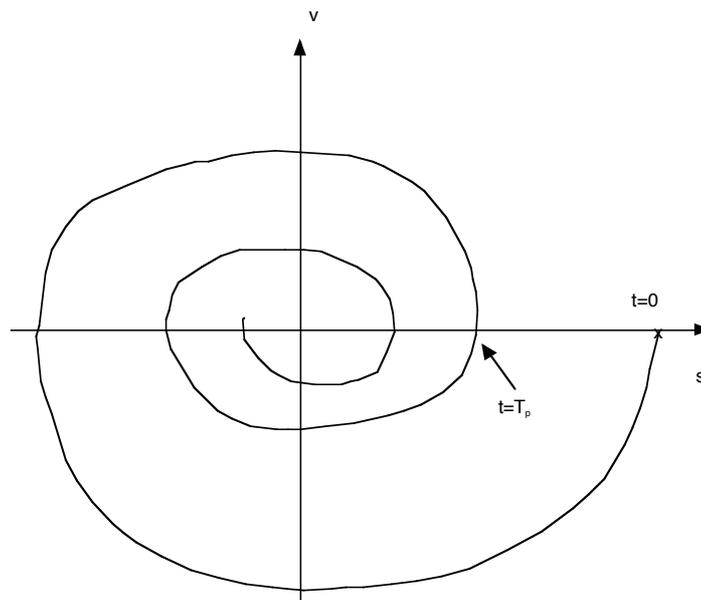


Fig. 1-10 : Diagramme de phase de l'oscillateur amorti

1.4.4.5. MOUVEMENT APÉRIODIQUE CRITIQUE

Dans le cas où on a : $\omega_0 = \beta$ ($Q = \frac{1}{2}$), il n'y a plus d'oscillation. L'amortissement est dit alors critique, ce qui correspond au coefficient suivant :

$$(1.31) \quad \beta = \beta_{crit} = \frac{h_{crit}}{2m} = \omega_0 = \sqrt{K/m}$$

soit pour le frottement, un coefficient $h_{crit} = 2\sqrt{mK}$.

L'équation caractéristique a une racine double $r_{1,2} = -\beta = -\sqrt{\frac{K}{m}}$.

La fonction $C_1 e^{-\omega_0 t}$ est une solution de l'équation. La fonction $C_2 t e^{-\omega_0 t}$ étant également solution, la solution générale s'écrit :

$$(1.32) \quad s = (C_1 + C_2 t) e^{-\omega_0 t}.$$

Le retour et l'immobilisation à la position d'équilibre se fait en un temps minimum.

La condition d'amortissement critique est recherchée pour les machines et les véhicules. Le régime est obtenu

Remarque : Ce régime critique étant un régime particulier (pour β supérieur, il n'y a plus d'oscillation), on utilise parfois un coefficient d'amortissement réduit $\varepsilon = \frac{h}{h_{crit}} = \frac{\beta}{\omega_0}$ pour indiquer la quantité d'amortissement dans le système. Ce paramètre est important dans les problèmes de résonance en excitation permanente (régime forcé).

1.4.4.6. RÉGIME SURAMORTI (OU APÉRIODIQUE)

Dans le cas où on a $\beta > \omega_0$ (et $Q < \frac{1}{2}$) les constantes d'intégration r_1 et r_2 sont réels et négatifs et le mouvement ne présente pas de périodicité. r_1 et r_2 sont solution des équations

$$r_1 + r_2 = -2\beta \text{ et } r_1 r_2 = \omega_0^2 \text{ soient :}$$

$$r_1 = -\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \text{ et } r_2 = -\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \text{ et la solution générale s'écrit :}$$

$$(1.33) \quad s(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} .$$

Ce régime est dit apériodique ou suramorti. Suivant les conditions initiales, la masse en oscillation franchit la position d'équilibre 1 fois ou 0 fois.

En régime apériodique le retour à la position d'équilibre est moins rapide qu'en régime critique.

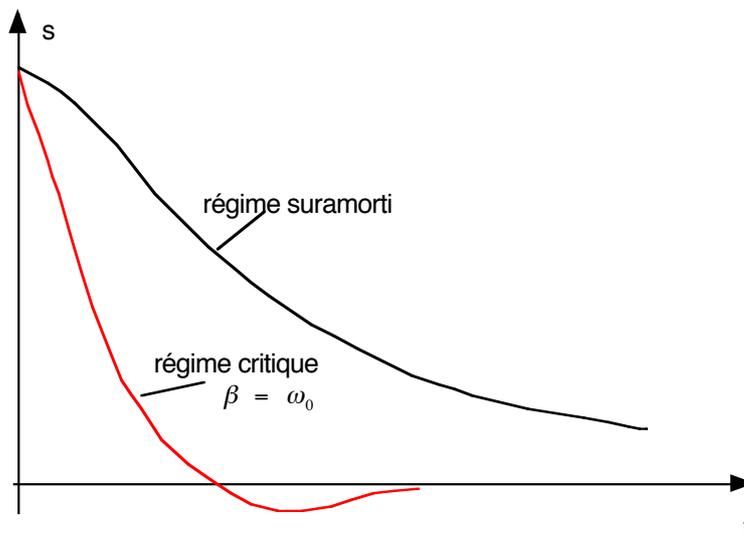


Fig. 1-11 : Régimes apériodiques d'un oscillateur suramorti. Le régime critique permet un retour plus rapide à la position d'équilibre que les autres régimes.

1.4.4.7. ÉNERGIE D'UN OSCILLATEUR MÉCANIQUE AMORTI

Décroissance de l'énergie au cours du temps

L'équation suivante est celle du bilan des forces $m \frac{d^2 s}{dt^2} + Ks = -h \frac{ds}{dt}$.

En multipliant tous les termes par la vitesse ($\vec{F} \cdot \vec{v}$ ou $F \cdot v$) $mv \frac{d^2 s}{dt^2} + Kvs = -h v \frac{ds}{dt}$ on obtient une expression qui peut s'écrire sous la forme :

$$(1.34) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} K s^2 \right) = P(t)$$

Ce qui se vérifie en écrivant :

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} K s^2 \right) = m \frac{ds}{dt} \frac{d^2s}{dt^2} + K s \frac{1}{2} \frac{ds}{dt} = \left(m \frac{d^2s}{dt^2} + K s \right) \frac{ds}{dt}$$

Le terme de gauche correspond à la variation de l'énergie totale du système à un instant donné. Le terme de droite, désigné par P correspond à la puissance instantanée de la force de frottement. On a donc : $dE_{\text{Tot}} = P dt$. La force de frottement transforme l'énergie de l'oscillateur en chaleur. L'énergie dissipée pendant un temps Δt correspond au travail de la force de frottement pendant ce temps.

Calculons l'énergie en partant de l'expression $s(t) = A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega_p t + \varphi_0)$, et en supposant que le facteur $e^{-\beta t}$ peut être considéré constant sur une période :

Énergie cinétique :

$$\begin{aligned} E_{\text{cin}} &= \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} m A_0^2 e^{-2\beta t} \left[\beta^2 \sin^2(\omega_p t + \varphi_0) + \omega_p^2 \cos^2(\omega_p t + \varphi_0) - 2\beta \omega_p \sin(\omega_p t + \varphi_0) \cos(\omega_p t + \varphi_0) \right] \end{aligned}$$

La valeur instantanée n'est pas très intéressante, considérons la valeur moyenne sur une période (en considérant le facteur $e^{-\beta t}$ constant) :

$$\langle E_{\text{cin}} \rangle = \frac{1}{2} m A_0^2 e^{-2\beta t} \left[\frac{1}{2} (\beta^2 + \omega_p^2) \right] = \frac{1}{4} m A_0^2 \omega_0^2 e^{-2\beta t}$$

Énergie potentielle :

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} K s^2 = \frac{1}{2} K A_0^2 e^{-2\beta t} \sin^2(\omega_p t + \varphi_0)$$

La valeur moyenne est égale à (avec la même hypothèse que ci-dessus) :

$$\langle E_{\text{pot}} \rangle = \frac{1}{2} K A_0^2 e^{-2\beta t}$$

On a bien : $\langle E_{\text{pot}} \rangle = \langle E_{\text{cin}} \rangle$ et l'énergie totale est égale à :

$$E(t) = \langle E_{\text{tot}} \rangle(t) = \frac{1}{2} K A_0^2 e^{-2\beta t} = \frac{1}{2} K A_0^2 e^{-\frac{t}{\tau_{\text{énergie}}}}$$

L'énergie décroît donc avec un temps caractéristique (constante de temps ou **temps de relaxation**) :

$$(1.35) \quad \tau_{\text{énergie}} = \frac{1}{2\beta} = \frac{1}{2} \tau_{\text{amplitude}}$$

Remarque : Il est pratique de considérer un temps caractéristique pour la décroissance de l'énergie, tel que l'énergie de l'oscillateur passe de la valeur initiale E_0 à $\frac{E_0}{e^2} = 0,13 E_0$ soit 13% (de la valeur initiale est égal à $\tau_{1/e^2} = \tau_{13\% \text{ del' } \text{énergie}} = 2 \tau_{\text{relax. } \text{énergie}} = \tau_{\text{relax. amplitude}} = \frac{1}{\beta}$).

Si on considère le temps nécessaire pour que 90% de l'énergie soit absorbée dans les frottements, cela donne :

$$E(\tau_{10\%}) = E_0 e^{-\tau_{10\%}/2\beta} = 0,1E_0 \quad \text{soit} \quad \tau_{10\%} = \frac{\ln(0,10)}{-2\beta}$$

En pratique, il est donc raisonnable de considérer que le mouvement dure un temps égal à environ 4 fois le temps caractéristique (ou temps de relaxation) en énergie τ_{energie} .

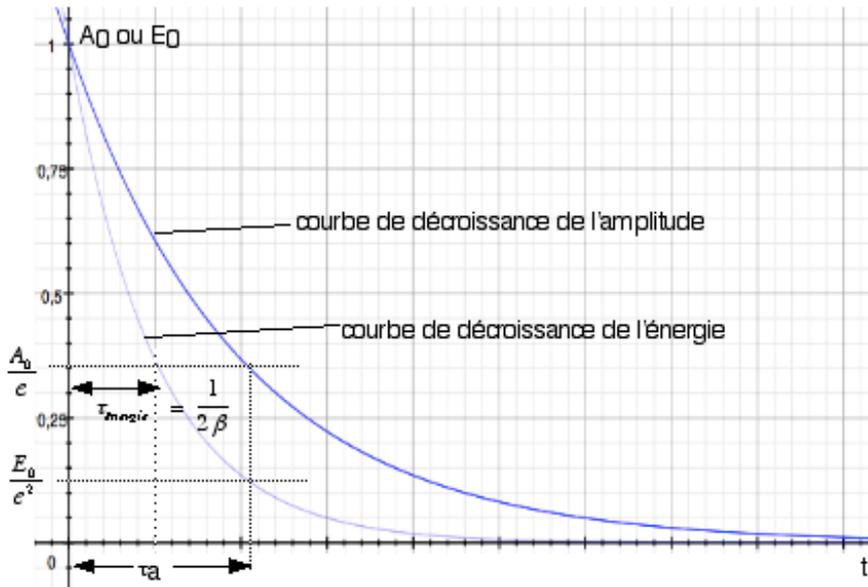


Fig. 1-12 : Décr oissance de l'énergie d'un oscillateur amorti à partir d'une valeur initiale E_0 .

Ce résultat n'est valable que si la dissipation d'énergie est due à une force proportionnelle à la vitesse. C'est le cas des systèmes mécaniques avec frottement visqueux ; ce ne serait pas le cas avec un frottement sec. Beaucoup de phénomènes physiques présentent des analogies avec l'oscillateur mécanique ralenti par un amortissement visqueux.

Remarque : Il est possible de retrouver l'équation différentielle du mouvement de l'oscillateur amorti en écrivant que la variation de l'énergie sur un intervalle de temps donné est égale au travail de la force de frottement.

Facteur de qualité d'un oscillateur amorti

L'oscillateur amorti est caractérisé par les deux paramètres ω_0 et β . ω_0 est la fréquence propre de l'oscillateur non amorti et l'inverse de β (ou temps d'amortissement en amplitude τ_a) est le temps caractéristique pendant lequel l'amplitude décroît à $1/e$ de sa valeur initiale. On peut introduire la notion de '**qualité**' pour caractériser l'oscillateur, comme la grandeur qui traduit l'aptitude du système considéré à garder son énergie tout en oscillant. En pratique, pour un système faiblement amorti, on utilise un coefficient Q (pour qualité) défini comme :

$$(1.36) \quad Q = 2\pi \frac{\text{Energie de l'oscillateur à un instant donné}}{\text{Energie perdue dans la période qui suit cet instant}}$$

Si on considère un oscillateur présentant de faibles pertes, qui démarre avec une énergie E_0 qui décroît avec une constante 2β , et perd l'énergie ΔE_I pendant la 1^{ère} période T d'oscillation, on a :

$$(1.37) \quad Q = 2\pi \frac{E_0}{\Delta E_1} = 2\pi \frac{1}{1 - e^{-2\beta T}} \approx 2\pi \frac{1}{2\beta T} = \frac{m\omega_p}{h} \approx \frac{m\omega_0}{h} = \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{1}{h} \sqrt{mK}$$

La qualité est d'autant meilleure que le rapport $\frac{E_0}{\Delta E_1}$ (E_0 , l'énergie du système à un moment donné, ΔE_1 , l'énergie perdue au cours de la période qui suit) est grand. Avec les grandeurs définies précédemment, on voit que pour un système mécanique, on a :

On peut encore écrire le coefficient de qualité de la façon suivante :

$$(1.38) \quad Q = \pi \frac{\tau_a}{T_p} = 2\pi \frac{\tau_e}{T_p} \approx 2\pi \frac{\tau_e}{T_0}$$

Il en résulte la relation suivante :

$$(1.39) \quad Q = \omega_0 \cdot \tau_e \quad \text{ou} \quad Q = \frac{\pi}{\delta} \quad \delta \text{ ayant précédemment comme } \delta = \beta T$$

Le coefficient Q permet de définir le type de mouvement en fonction des pertes du système :

- pour $Q \leq \frac{1}{2}$, le régime est apériodique et il n'y a pas d'oscillations ;
- pour $Q > \frac{1}{2}$, on observe un régime d'oscillation pseudo-périodique. La fréquence des

oscillations est donnée par : $f_p = \frac{1}{2\pi} \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} = f_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$.

Dans le cas $Q \gg 1$, la fréquence devient : $f_p \approx \frac{1}{2\pi} \omega_0 \left(1 - \frac{1}{8Q^2}\right) = f_0 \left(1 - \frac{1}{8Q^2}\right)$, soit pour la période : $T_p \approx T_0 \left(1 + \frac{1}{8Q^2}\right)$. On voit que pour $Q > 3,5$, T_p et T_0 diffèrent de moins de 1%.

1.5. L'OSCILLATEUR MÉCANIQUE EN TRANSLATION À 1DDL EN RÉGIME FORCÉ

1.5.1. LE MODÈLE.

Une masse m est reliée à un support rigide par l'intermédiaire d'un ressort idéal de raideur K et d'un amortisseur visqueux de coefficient de frottement h . La force excitatrice est donnée par $f_{ext} = F_{ext} \cos(\omega t)$. La forme sinusoïdale de la force ne constitue pas une limite à la généralité de l'étude, une fonction périodique pouvant toujours se ramener à une somme de fonctions sinusoïdales. Cette approche est d'une grande utilité dans de nombreuses situations : étude de circuits électriques, acoustiques, interaction lumière-matière On cherche $s(t)$, l'écart de la masse par rapport à sa position d'équilibre et $f_{sup}(t)$, la force transmise au support.

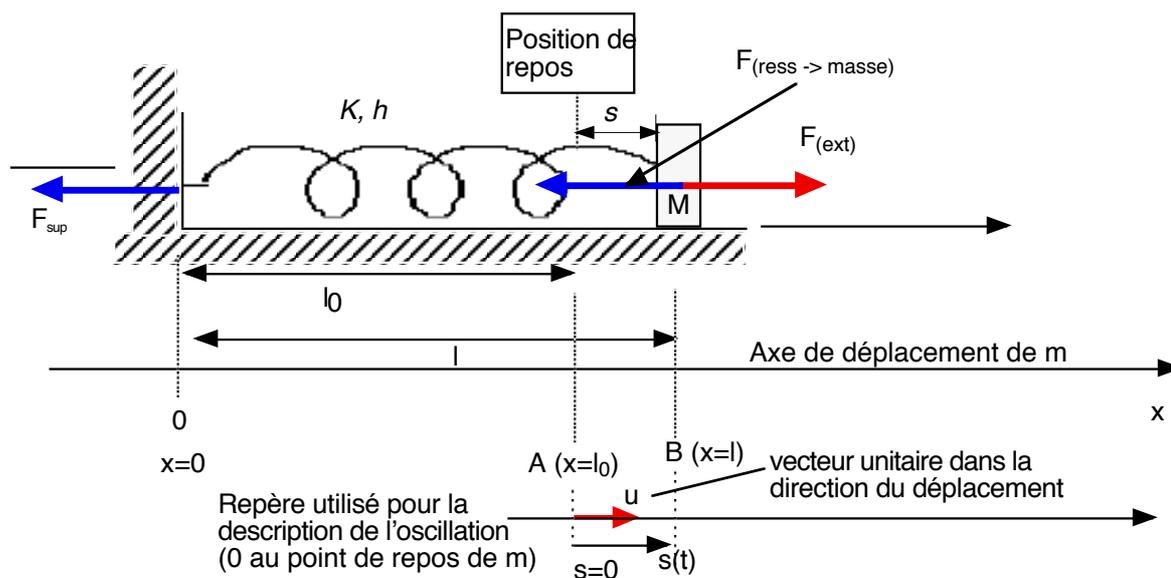


Fig. 2-1 : Oscillateur à 1 degré de liberté. Excitation permanente par une force f_{exc} .

En pratique, la réalisation de l'excitation peut se faire en imposant un mouvement sinusoïdal à l'extrémité du ressort attaché au support rigide.

Au lieu d'être reliée à un support fixe l'extrémité de gauche (dessin) du ressort subit un déplacement sinusoïdal de pulsation ω entre C_0 et C. Ce déplacement s'écrit : $\overline{C_0C} = a \cos(\omega t) \vec{u}$

Il apparaît donc une tension dans le ressort qui dépend de la position de ses deux extrémités. Pour une situation quelconque on a :

$$\vec{T} = -K(\overline{CB} - \overline{C_0A}) = -K(s - a \cos(\omega t)) \vec{u}$$

La tension étant la même partout dans le ressort, cette situation est équivalente à celle où, sur la masse s'appliquerait une force d'excitation donnée par : $f_{\text{ext}} = F_{\text{ext}} \cos(\omega t) = Ka \cos(\omega t)$

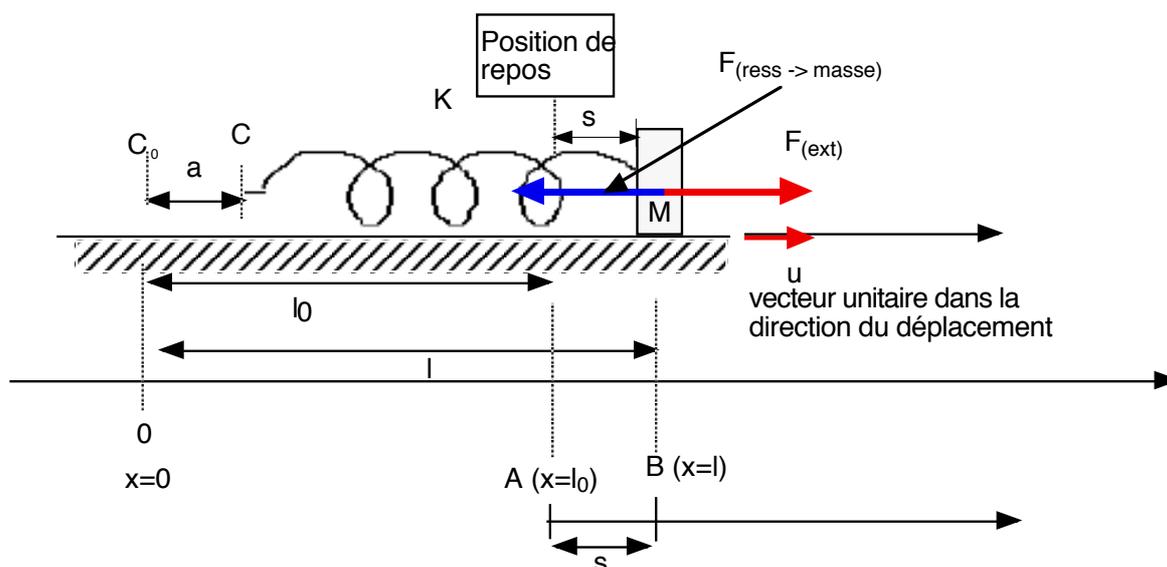


Fig. 2-2 : Oscillateur m-K amorti en régime forcé. La masse est fixée à une extrémité d'un ressort. L'autre extrémité subit un déplacement sinusoïdal, ce qui se traduit par une force de même nature qui s'applique à la masse m.

1.5.2. MISE EN ÉQUATION DE L'OSCILLATEUR AMORTI EN RÉGIME FORCÉ

Il convient comme dans le cas de l'oscillateur libre, de donner l'état du système par l'intermédiaire de son écart s par rapport à sa position d'équilibre. Le principe fondamental de la dynamique permet d'écrire :

$$(1.40) \quad m \frac{d^2 s}{dt^2} + h \frac{ds}{dt} + Ks = F_{exc} \cos(\omega t)$$

En reprenant la notation utilisée précédemment ($\beta = h/2m$ et $\omega_0 = \sqrt{K/m}$), nous avons :

$$(1.41) \quad \frac{d^2 s}{dt^2} + 2\beta \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = \frac{F_{exc}}{m} \cos(\omega t)$$

ou encore, en utilisant le coefficient de qualité (avec $Q = \frac{\omega_0}{2\beta} = \omega_0 \frac{m}{h}$) :

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = \frac{F_{exc}}{m} \cos(\omega t)$$

Un autre choix consiste à utiliser le coefficient $\gamma = 2\beta = h/m$. On voit à la fin du développement que dans un cas (choix de β), on décrit la variation de l'amplitude de l'oscillation en fonction du temps et dans l'autre cas (choix de γ), celle de l'énergie.

La solution générale de cette équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants est la somme

- d'une solution générale de l'équation avec 0 au 2ème membre (l'oscillateur 'libre amorti') et
- d'une solution particulière du type $s(t) = X(\omega) \cos(\omega t + \varphi(\omega))$ soit

$$(1.42) \quad s(t) = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega_p t + \varphi_0) + X(\omega) \cos(\omega t + \varphi(\omega))$$

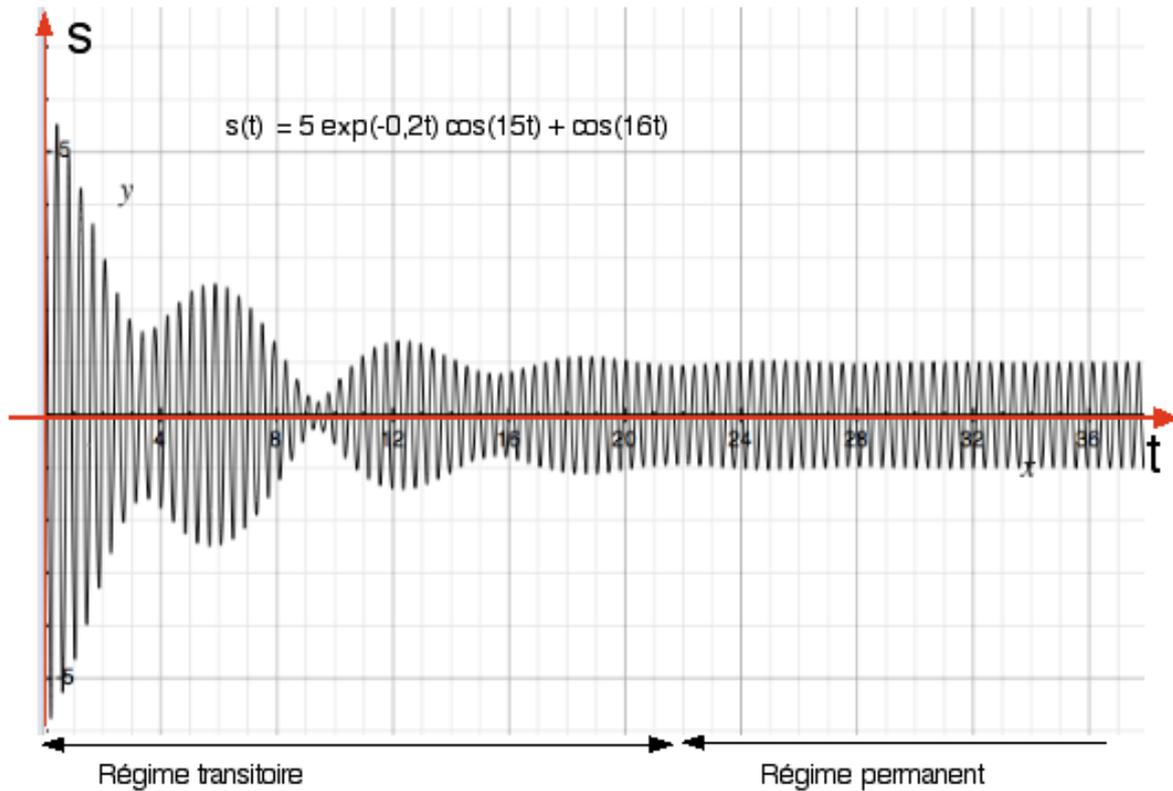


Fig. 2-1 : Exemple de réponse d'un oscillateur amorti en régime forcé.

Le premier terme de l'expression $A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega_p t + \varphi_0)$ n'existe que pendant un régime transitoire dont la durée dépend de la quantité d'amortissement présent dans l'oscillateur. Cette durée est caractérisée par le temps de décroissance de l'énergie de déformation initiale en régime libre, soit :

$$\tau_{ener} = \frac{1}{2\beta} = \frac{1}{2} \tau_{ampl}.$$

Au bout d'un temps de quelques fois (4 à 5) τ_{ener} , on peut considérer qu'on a un régime permanent auquel il convient de s'intéresser plus particulièrement.

Les différents régimes des oscillations libres, en fonction de la valeur de $\beta = \frac{h}{2m}$ ont été obtenus dans le paragraphe précédent. Le cas avec $h = 0$, correspondant à l'absence d'amortissement, est irréaliste en pratique mais permet de définir une pulsation de référence ω_0 . Un régime de faible amortissement avec $\beta = \frac{h}{2m} \ll \omega_0$, est plus conforme à la réalité ; l'oscillation se caractérise alors par une pseudo pulsation ω_p , peu différente de la pulsation de l'oscillateur libre ω_0 ($\omega_p \approx \omega_0$).

Lorsque l'excitation est permanente, la réponse du système est la solution particulière $s(t) = X \cos(\omega t + \varphi)$. Cette solution s'applique d'autant plus vite que l'amortissement est important. ω est un paramètre que l'on fait varier ; X et φ dépendent de ω , K , h et m , mais ne dépendent pas des conditions initiales. Au début de l'excitation, on observe donc un régime transitoire pendant lequel les deux solutions coexistent. Le régime transitoire est suivi du régime forcé permanent (au bout d'un temps de 4 à 5 τ_{ener}).

Remarque : Équation différentielle pour la vitesse vibratoire.

En utilisant l'expression de la vitesse $v = \frac{ds}{dt}$, on obtient une équation différentielle de même forme pour ce paramètre : $\frac{dv}{dt} + 2\beta v + \omega_0^2 \int v dt = \frac{F_{exc}}{m} \cos(\omega t)$ ou après dérivée

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 2\beta \frac{dv}{dt} + \omega_0^2 v = \omega \frac{F_{exc}}{m} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

1.5.3. AMPLITUDE ET PHASE EN RÉGIME PERMANENT EN RÉGIME PERMANENT.

1.5.3.1. ÉLONGATION

Utilisons la représentation complexe pour résoudre l'équation :

$$(1.43) \quad m \ddot{s} + h \dot{s} + Ks = F_{exc} \cos(\omega t)$$

En régime permanent, la réponse correspond à une solution particulière de la forme

$$(1.44) \quad s = X \cos(\omega t + \varphi).$$

Cette expression s'écrit sous la forme complexe suivante :

$$(1.45) \quad \tilde{s}(t) = X e^{j(\omega t + \varphi)} = X e^{j\varphi} e^{j\omega t} = \tilde{X} e^{j\omega t}$$

dont la partie réelle correspond au phénomène physique. La grandeur \tilde{X} est l'amplitude complexe ; ce terme contient l'information sur l'amplitude et le déphasage entre la réponse et l'excitation.

Dans ce cas nous avons : $\dot{\tilde{s}} = j\omega \tilde{s} = j\omega \tilde{X} e^{j\omega t}$ et $\ddot{\tilde{s}} = -\omega^2 \tilde{s}$.

En introduisant la forme complexe de la solution dans l'équation ci-dessus, nous obtenons

$$\left[-m\omega^2 + j\omega h + K\right] \tilde{X} e^{j\omega t} = F_{exc} e^{j\omega t}$$

qui a la solution algébrique suivante :

$$(1.46) \quad \tilde{X} = \frac{F_{exc}}{(-m\omega^2 + K) + j\omega h} = \frac{F_{exc}}{(-m\omega^2 + K)^2 + (\omega h)^2} \left[(-m\omega^2 + K) + j(-\omega h)\right]$$

La solution réelle est donnée par $s(t) = X(\omega) \cos(\omega t + \varphi(\omega))$ où $X(\omega)$ est l'amplitude du mouvement harmonique observé, et $\varphi(\omega)$, le déphasage de ce mouvement de la masse m par rapport à la force d'excitation qui est à l'origine. On a :

$$(1.47) \quad X(\omega) = \frac{F_{exc}}{\sqrt{(-m\omega^2 + K)^2 + h^2\omega^2}} \text{ ou } X(\omega) = \frac{F_{exc}}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\beta\omega)^2}} \text{ et}$$

$$(1.48) \quad \varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{-\omega h}{-m\omega^2 + K}\right) \text{ ou } \varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{-2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right).$$

Remarque : En utilisant le paramètre Q ($Q = \frac{\omega_0}{2\beta}$) introduit précédemment, on obtient l'expression suivante :

$$(1.49) \quad \tilde{X} = \frac{\frac{F_{exc}}{m}}{\left(-\omega^2 + \frac{K}{m}\right) + j\frac{\omega h}{m}} = \frac{\frac{F_{exc}}{m}}{\left(-\omega^2 + \omega_0^2\right) + j\omega \frac{\omega_0}{Q}} = \frac{\frac{F_{exc}}{m\omega_0^2}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) + j\frac{\omega}{\omega_0 Q}} = X(\omega) e^{j\varphi(\omega)} \text{ ou}$$

$$X(\omega) = \frac{F_{exc}/m\omega_0^2}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_0 Q}\right)^2}} \quad \text{et} \quad \varphi(\omega) = \arctan \left[-\frac{\omega}{\omega_0 Q \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)} \right]$$

1.5.3.2. VITESSE VIBRATOIRE EN RÉGIME PERMANENT

La vitesse vibratoire est obtenue en dérivant la position $\tilde{s}(t) = X(\omega) e^{j\varphi} e^{j\omega t}$ par rapport au temps :

$$(1.50) \quad \tilde{v}(t) = \frac{d\tilde{s}(t)}{dt} = j\omega \tilde{s}(t) ;$$

ce qui donne pour l'amplitude complexe :

$$\tilde{V}(\omega) = \frac{j\omega \frac{F_{exc}}{m\omega_0^2}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{\omega}{\omega_0 Q}} = V(\omega) e^{j\varphi_v(\omega)}$$

soit pour l'amplitude de vitesse et son déphasage :

$$V(\omega) = \frac{\omega \frac{F_{exc}}{m\omega_0^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_0 Q}\right)^2}} ; \quad \varphi_v(\omega) = \arctan \left[Q \left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right) \right].$$

1.5.4. RÉPONSE EN FRÉQUENCE

Dans un but de généralisation, il convient d'introduire les paramètres relatifs ci-après :

$$(1.51) \quad \Omega = \frac{\omega}{\omega_0} ; \quad \hat{X} = \frac{X}{X_{\omega=0}} ; \quad X(\omega=0) = \frac{F_{exc}}{K} ; \quad \varepsilon = \frac{h}{h_{crit}} ,$$

avec $h_{crit} = 2\sqrt{mK}$; le facteur de qualité $Q = \frac{m\omega_0}{h} = \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{1}{2\varepsilon}$ a été introduit précédemment.

La solution générale s'écrit :

$$(1.52) \quad \tilde{X} = \frac{1}{1 - \Omega^2 + j2\varepsilon\Omega}$$

ce qui correspond aux grandeurs réelles suivantes :

$$(1.53) \quad \text{(a) } \hat{X} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \Omega^2)^2 + (2\varepsilon\Omega)^2}} \quad \text{et} \quad \text{(b) } \hat{\varphi} = \arctg \left(\frac{-2\varepsilon\Omega}{1 - \Omega^2} \right) .$$

L'étude de la variation de \hat{X} en fonction de Ω se fait en calculant $d\hat{X}/d\Omega$. On montre que la dérivée s'annule pour $\Omega = 0$ et $\Omega = \sqrt{1 - 2\varepsilon^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$. Le deuxième zéro n'existe que si $\varepsilon < \frac{1}{\sqrt{2}}$. L'amplitude \hat{X} à $\Omega = 1$ est $\hat{X}_{\omega=\omega_0} = \frac{1}{2\varepsilon}$, une valeur proche du maximum

$\hat{X}_{\max} = \frac{1}{2\varepsilon\sqrt{1-\varepsilon^2}}$; ce phénomène appelé **résonance d'élongation** apparaît donc pour $Q > \frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\varepsilon < \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

La figure ci-après résume ce résultat.

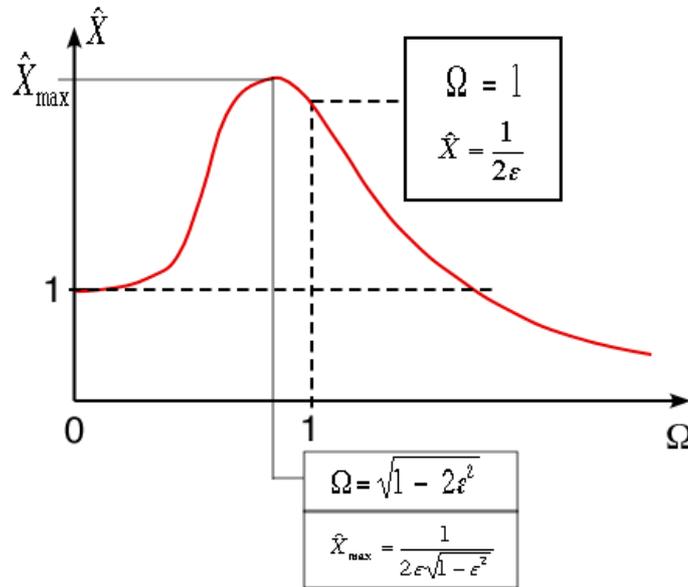


Fig. 2-2 : Allure de la réponse en amplitude d'un oscillateur à une excitation en paramètres relatifs. Le maximum d'élongation (ou résonance d'élongation) est obtenu pour une pulsation légèrement inférieure à la pulsation propre ω_0 .

Remarques :

1 - Quel que soit l'amortissement, $\hat{X} = \frac{X}{X_0} \rightarrow 1$ si $\Omega \rightarrow 0$

et $\frac{X}{X_0} \rightarrow 0$ si $\Omega \rightarrow \infty$.

2 - En pratique, si l'amortissement est faible ($\varepsilon^2 \ll 1$), la pulsation de résonance d'élongation se confond avec la pulsation libre $\omega_{res} \approx \omega_0$. On a alors : $\hat{X}_{\max} = \frac{1}{2\varepsilon} = Q$. On montre plus loin que la résonance de puissance a lieu à la pulsation propre.

3. Dans le cas où ε^2 ne peut pas être négligé devant 1, il convient de distinguer ω_0 , la pulsation propre (sans amortissement),

$\omega_p = \omega_0 \sqrt{1 - \varepsilon^2}$, la pseudo-pulsation du système libre amorti,

$\omega_{res} = \omega_0 \sqrt{1 - 2\varepsilon^2}$ la pulsation de résonance d'élongation du système forcé.

Si $\varepsilon < 1$, le régime libre est périodique.

4. Dans le cas où $\varepsilon < 1/\sqrt{2}$ ou $Q > \sqrt{2}/2$, il existe une résonance. La pulsation de résonance est la pulsation de la force d'excitation pour laquelle l'oscillateur répond avec un amplitude maximale.

5. Comportement asymptotique : Quand Ω devient grand devant 1, X varie comme $\frac{1}{\Omega^2}$. Pour 2 pulsations ω_i et ω_j telles que $\omega_j = 2\omega_i$, on a $X_j = \frac{1}{4} X_i$ soit $20 \log \left(\frac{X_j}{X_i} \right) = -12 \text{ dB}$.

Les figures suivantes représentent graphiquement en amplitude X et en phase la réponse d'un oscillateur forcé en fonction de la fréquence.

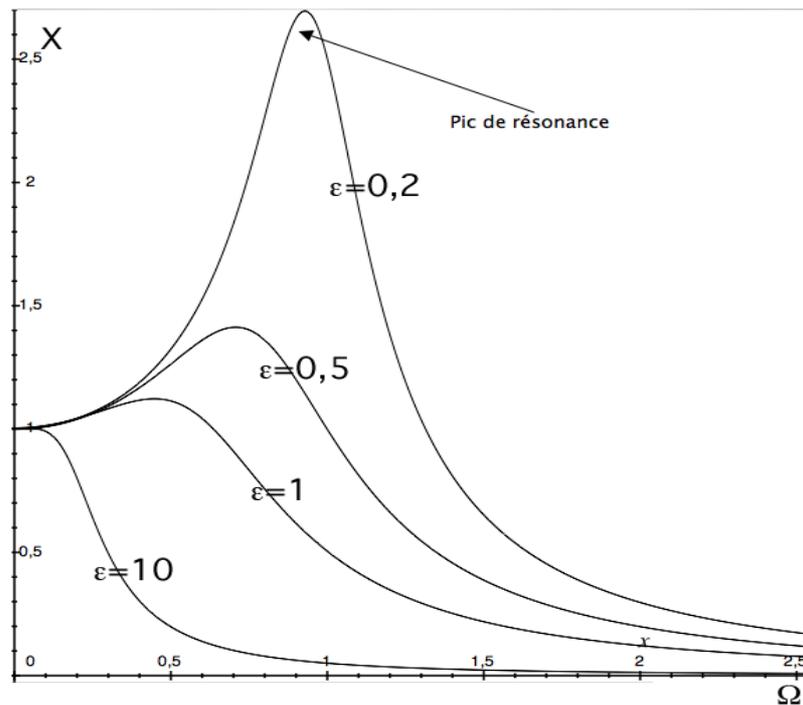


Fig. 2-3 : Oscillation forcée. Amplitude relative en fonction de la pulsation relative. Le pic de résonance d'élongation apparaît si $Q > \frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\epsilon < \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

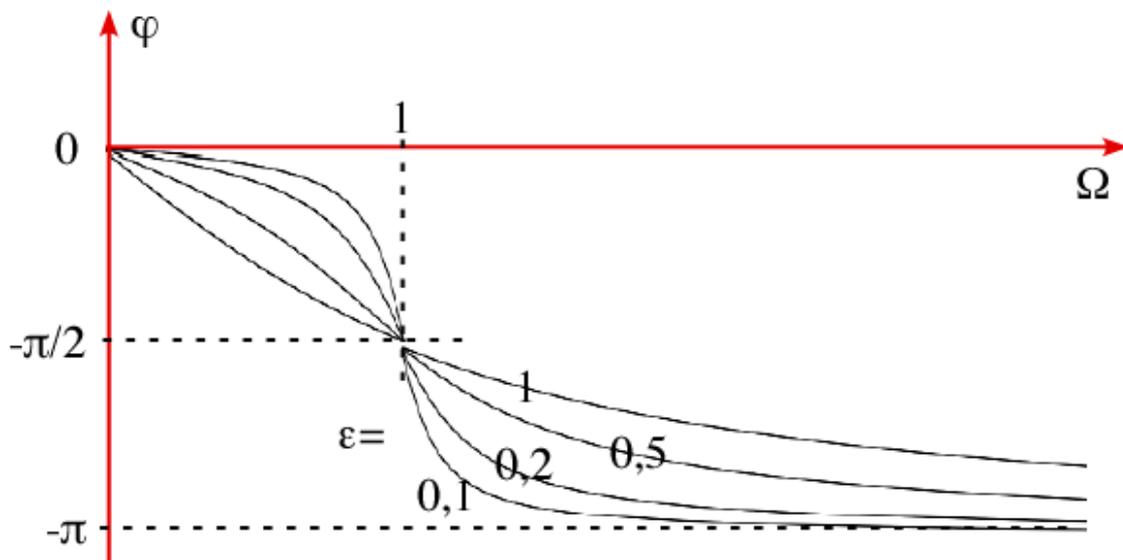


Fig. 2-4 : Oscillation forcée. Phase en fonction de la pulsation relative. Pour les fréquences basses ($\omega \ll \omega_0$ ou $\Omega \ll 1$), l'oscillateur est en phase avec l'excitation. Pour les fréquences élevées, la différence de phase est π .

1.5.5. PIC DE RÉSONANCE : BANDE PASSANTE À -3 dB

1.5.5.1. RÉSONANCE D'ÉLONGATION.

La réponse en fréquence d'un oscillateur forcé au voisinage de la résonance peut être représentée en coordonnée de Bode ($G(\omega) = 20 \log\left(\frac{X}{X_{\max}}\right)$). Le maximum de la courbe d'élongation est obtenu pour une pulsation d'excitation de :

$$(1.54) \quad \omega_{rés} \approx \omega_0 = \sqrt{K/m}$$

Pour un amortissement faible ($d = 2 \varepsilon < 0,2$), l'amplitude atteint une valeur maximale égale à :

$$(1.55) \quad X_{\max} = X(\omega \approx \omega_0) = \frac{F_{exc}}{m \omega_0 \cdot 2\beta} .$$

La bande passante à -3dB est définie comme la bande spectrale comprise entre les deux valeurs de ω pour lesquelles $G(\omega) = -3 \text{ dB}$ soit $X = \frac{X_{\max}}{\sqrt{2}}$. En écrivant les deux égalités et en négligeant le terme en ε^4 , on obtient :

$$(1.56) \quad \frac{\Delta\omega_{-3dB}}{\omega_0} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0} = 2\varepsilon .$$

La largeur de bande à 3 dB est donc donnée par :

$$\Delta\omega_{-3dB} = \omega_0 \cdot 2\varepsilon = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{h}{m}$$

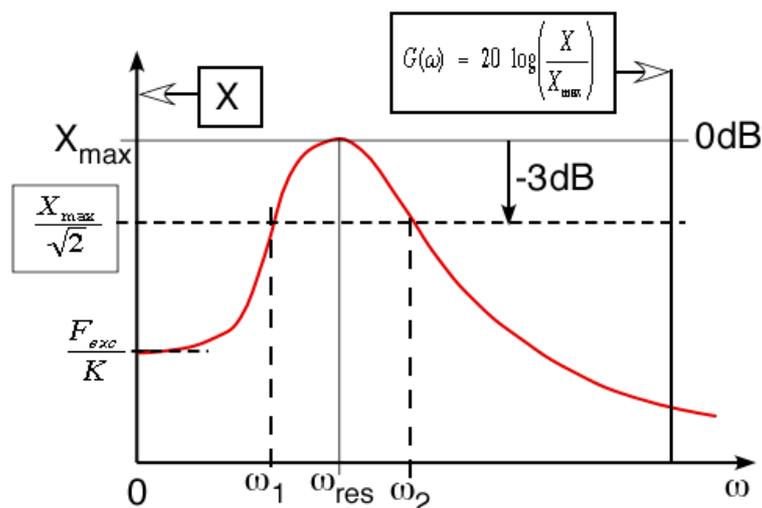


Fig. 2-5 : Réponse en amplitude d'un oscillateur à 1 degré de liberté au voisinage de la résonance. Bande passante à -3 dB : $[\omega_2 - \omega_1]$.

1.5.5.2. BILAN EN PUISSANCE

La force d'excitation transfère à l'oscillateur une puissance instantanée égale à :

$$P_{inst}(t) = f_{ext}(t) \cdot v(t) = F_{ext} \cos(\omega t) \cdot V \cos(\omega t + \varphi_v)$$

$$\text{soit : } P_{inst}(t) = \frac{1}{2} F_{ext} \cdot V \left[\cos(\varphi_v) + \cos(2\omega t + (\varphi_v)) \right].$$

Il en résulte une puissance moyenne transférée à l'oscillateur :

$$P_{moy} = \frac{1}{2} F_{ext} \cdot V \cos(\varphi_v)$$

Pour trouver $\cos(\varphi_v)$, il faut repartir de l'amplitude complexe de vitesse déterminée précédemment :

$$\tilde{V}(\omega) = \frac{j\omega \frac{F_{exc}}{2}}{m\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega\omega_0 Q} = V(\omega) e^{j\varphi_v(\omega)}.$$

Écrivons $\tilde{V}(\omega)$ sous la forme $\tilde{V}(\omega) = V(\omega) [\cos(\varphi_v) + j \sin(\varphi_v)]$ en multipliant numérateur et dénominateur de $\tilde{V}(\omega)$ par $1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{\omega_0 Q}$:

$$V \cos(\varphi_v) = \frac{\frac{\omega^2 F_{ext}}{2} m\omega_0^3}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_0 Q}\right)^2}.$$

On en déduit l'expression de la puissance moyenne transférée :

$$(1.57) \quad P_{moyen.F} = \frac{1}{2} \frac{Q F_{ext}^2}{m\omega_0} \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_0 Q}\right)^2}.$$

Les frottements qui se manifestent par la force $F_{frott} = -h v$ correspondent à une puissance instantanée :

$$P_{inst.frott}(t) = F \cdot v = -h v^2 = -h V^2 \cos^2(\omega t + \varphi_v),$$

ce qui correspond à une puissance moyenne :

$$P_{moy.frott}(t) = \langle P_{frott} \rangle = -\frac{1}{2} h V^2 = P_{moyen} = -\frac{1}{2} \frac{Q F_{ext}^2}{m\omega_0} \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_0 Q}\right)^2}.$$

On voit que : $P_{moyen.F} + P_{moyen.frott} = 0$, ce qui signifie que la puissance moyenne apportée par la force extérieure équilibre la puissance dissipée par la force de frottement. On peut montrer que les puissances moyennes de la force d'inertie et de la force élastique sont nulles.

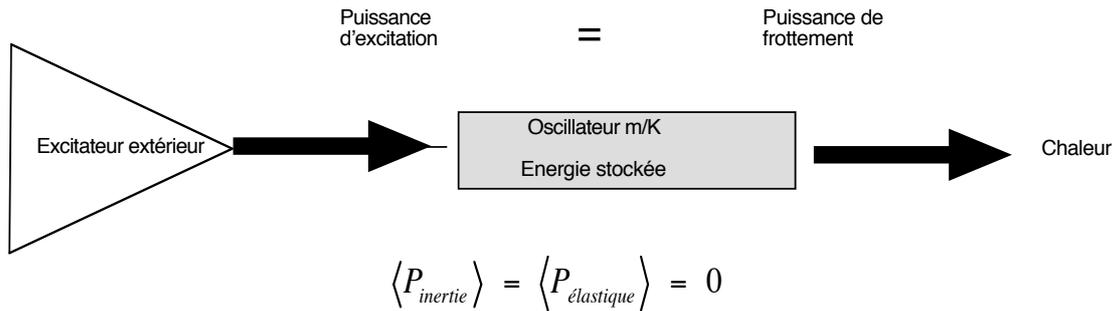


Fig. 2-6 : Bilan énergétique de l'oscillateur en régime forcé (régime permanent). La puissance d'excitation est égale à la puissance dissipée par les forces de frottement. Les puissances moyennes des forces d'inertie et élastique sont nulles.

La puissance moyenne apportée par l'excitateur à l'oscillateur passe par un maximum :

$\langle P_{exc} \rangle_{\max} = \frac{1}{2} \frac{QF_{ext}^2}{m\omega_0}$ pour une pulsation ω égale à la pulsation propre ω_0 . Cette valeur correspond à la **résonance de puissance**. En faisant apparaître la valeur de la puissance maximale (résonance) dans l'expression de la puissance moyenne apportée par l'excitation, on a la forme suivante :

$$P_{moyen} = P_{moyen \cdot \max} \frac{1}{Q^2 \left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 + 1}$$

ou avec le coefficient β : $P_{moyen}(\omega) = P_{moyen \cdot \max} \frac{4\beta^2\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}$.

La courbe de résonance de puissance prend donc l'allure ci-après.

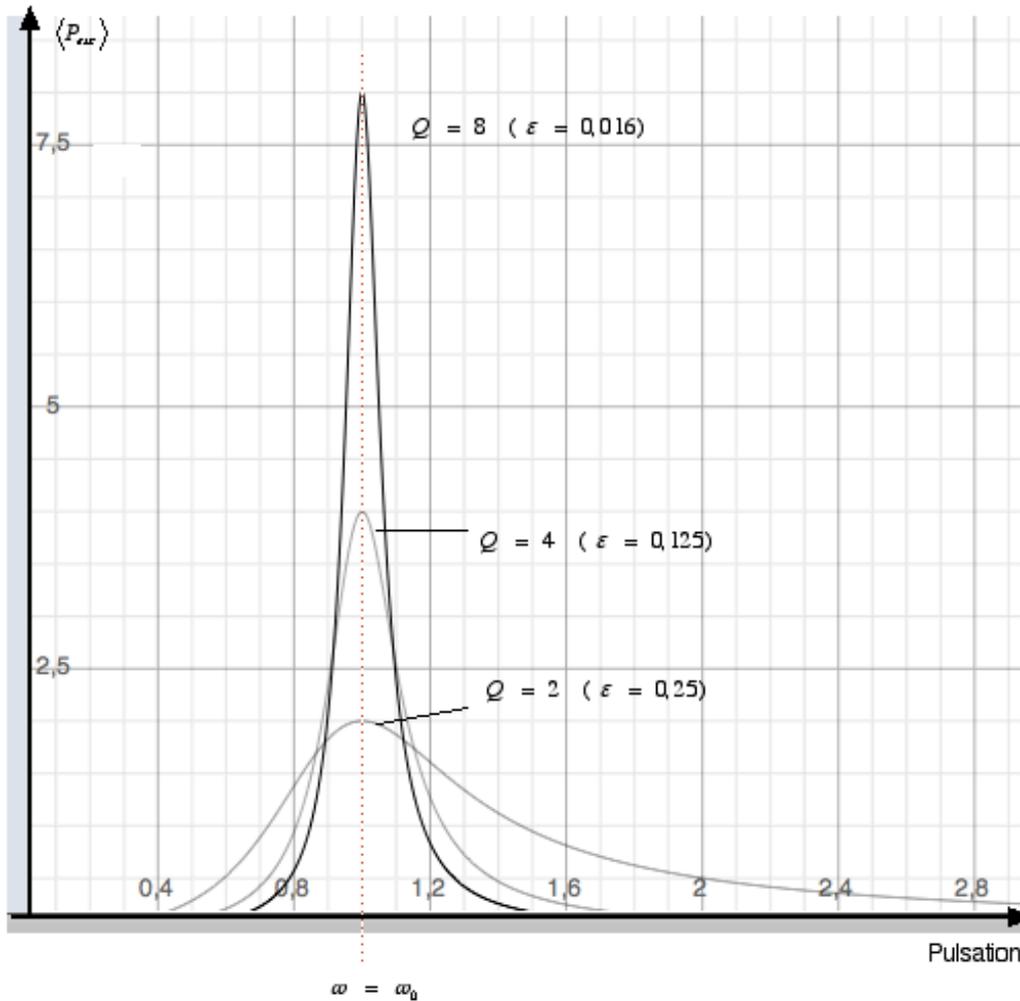


Fig. 2-7 : Courbe de résonance en puissance moyenne d'un oscillateur amorti en régime forcé. La puissance transférée à l'oscillateur passe par un maximum lorsque la pulsation d'excitation coïncide avec la pulsation propre.

Il est souvent intéressant de considérer la bande de fréquence d'excitation entre les deux valeurs pour lesquelles P est égale à la moitié de la puissance à la résonance. Les valeurs de pulsation $\omega_{1,2}$ correspondantes vérifient l'équation :

$$\frac{P_{\text{moyen.max}}}{2} = P_{\text{moyen.max}} \frac{1}{Q^2 \left(\frac{\omega_0}{\omega_{1,2}} - \frac{\omega_{1,2}}{\omega_0} \right)^2 + 1} \text{ dont les solutions sont :}$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_0} = \frac{1}{2Q} \left(-1 + \sqrt{1+4Q^2} \right) \text{ et } \frac{\omega_2}{\omega_0} = \frac{1}{2Q} \left(1 + \sqrt{1+4Q^2} \right).$$

Il apparaît que la courbe de résonance en puissance a une largeur à mi-hauteur (ou bande passante)

$$(1.58) \quad \Delta\omega_{1/2} = B_{P_{1/2}} = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q} = 2\beta \left(= \frac{h}{m} \text{ ou } \frac{R}{L} \right).$$

On voit ici que le coefficient $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega_{1/2}}$ ou coefficient de qualité caractérise la capacité de l'oscillateur de récupérer de l'énergie de l'excitateur.

Nous avons vu précédemment que l'oscillation a lieu pendant un temps caractéristique (ou constante de temps) $\tau_e = \frac{1}{2}\tau_a = \frac{1}{2\beta}$. La relation ci-dessus nous permet de déduire une relation très générale entre l'étendue spectrale du pic de résonance et le temps d'amortissement (en énergie) des oscillations libres :

$$(1.59) \quad \boxed{\Delta\omega_{rés.1/2} \cdot \tau_e = 1}$$

1.5.6. RÉPONSE EN FRÉQUENCE EN AMORTISSEMENT STRUCTURAL

Nous avons vu dans le chapitre 1 que dans le cas d'un amortissement structural le matériau est caractérisé par un **facteur de perte** noté d . Pour un amortissement visqueux, c'est h qui est constant et indépendant de ω alors que pour un amortissement structural, c'est d qui est constant dans un intervalle de fréquence donné. Le coefficient de frottement donné par $h_{struct} = \frac{Kd}{\omega}$ est alors inversement proportionnel à la fréquence ω d'excitation et proportionnel à K .

On procède comme pour l'amortissement visqueux. Les résultats diffèrent peu de ce cas et deviennent plus simples, surtout si $d \ll 1$. On obtient en reprenant les expressions précédentes pour $X(\omega)$ et $\varphi(\omega)$:

$$(1.60) \quad (a) X = \frac{F_{exc}}{\sqrt{(-m\omega^2 + K)^2 + (Kd)^2}} \text{ et } (b) \varphi = \arctan\left(\frac{-Kd}{-m\omega^2 + K}\right)$$

Le coefficient de qualité est donné par

$$Q = \frac{m\omega_0}{h} = \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{1}{2\varepsilon} = \frac{1}{d}$$

A la résonance, dans le cas d'un amortissement faible ($d = 2\varepsilon < 0,2$), l'amplitude passe par le maximum : $\hat{X}_{max} = \frac{1}{2\varepsilon} = \frac{1}{d} = Q$ ou $X_{max} = X(\omega \approx \omega_0) = \frac{F_{exc}}{Kd} = \frac{X(\omega=0)}{d}$.

Quelques valeurs pour d (parfois noté η) :

Métaux : 10^{-4} à 10^{-3} ; Béton, Bois : 10^{-2} ; Plexiglass : 2×10^{-2} à 4×10^{-2} ; Caoutchouc : 0,8 ; Verre : 10^{-3} à 10^{-2} . Ces valeurs dépendent de paramètres comme la température, l'humidité, le type d'assemblage, ...

1.5.7. LIMITATIONS D'AMPLITUDE À LA RÉSONANCE.

L'amplitude des oscillations à la RÉSONANCE est limitée par :

- l'amortissement (toujours présent),
- les non linéarités des forces de rappel, (K augmente avec l'amplitude)
- les limites géométriques (butées),
- la rupture du système.

1.5.8. AMPLITUDES D'ABSORPTION ET AMPLITUDES ÉLASTIQUES EN RÉGIME PERMANENT.

On se place toujours dans le cas d'une excitation forcée donnée par $f_{ext} = F_{ext} \cos(\omega t)$. Nous avons vu que la réponse en régime permanent s'écrit : $s(t) = X(\omega) \cos(\omega t + \varphi(\omega))$. Cette écriture montre la réponse en faisant apparaître l'amplitude et le déphasage par rapport à l'excitation. Une autre écriture est possible, sous la forme de la superposition de deux composantes [Crawford.72] :

$$(1.61) \quad x(t) = X_{abs} \sin(\omega t) + X_{\acute{e}} \cos(\omega t),$$

- un premier terme en quadrature de phase avec la force d'excitation harmonique $F_{exc} \cos(\omega t)$
- et un deuxième terme en phase avec la force. Le choix des indices (*abs*) et (*élas*) apparaît plus loin. Après remplacement de la solution ci-dessus dans l'équation différentielle de départ, on trouve pour X_{abs} et $X_{\acute{e}las}$:

$$(1.62) \quad X_{abs} = \frac{F_{exc}}{m} \frac{2\beta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}$$

$$(1.63) \quad X_{\acute{e}las} = \frac{F_{exc}}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}.$$

$X_{\acute{e}las}$ est l'amplitude élastique ou amplitude dispersive ; X_{abs} est l'amplitude d'absorption. Le terme d'absorption permet de calculer la puissance moyenne absorbée par l'oscillateur, la contribution à l'absorption due au terme élastique s'annulant en moyenne sur une période en régime permanent. La puissance instantanée absorbée par l'oscillateur est en effet

$$(1.64) \quad P(t) = F_{exc} \cos(\omega t) v(t) \text{ soit en régime permanent :}$$

$$P(t) = F_{exc} \cos(\omega t) [\omega X_{abs} \cos(\omega t) - \omega X_{\acute{e}las} \sin(\omega t)]$$

La contribution de la vitesse $v(t) = \dot{x}(t)$ qui est en phase avec la force contribue à la puissance mais pas la composante en quadrature avec la force comme on peut le voir en intégrant la puissance instantanée sur une période. On a alors pour la puissance moyenne consommée par l'oscillateur :

$$(1.65) \quad P_{abs} = \frac{1}{2} F_{exc} \omega X_{abs}$$

Cette puissance absorbée en moyenne en régime permanent est évidemment égale à la puissance dissipée par les frottements :

$$(1.66) \quad P_{fr} = m 2\beta \langle \dot{x}^2(t) \rangle = m \beta \omega^2 [X_{abs}^2 + X_{\acute{e}las}^2].$$

1.5.9. AMPLITUDE EN RÉGIME TRANSITOIRE

En présence de conditions initiales quelconques, il convient de chercher la solution générale de l'équation (2.3) sous la forme :

$$s(t) = s_{rp}(t) + s_1(t)$$

$$= X_a \sin(\omega t) + X_{\acute{e}} \cos(\omega t) + \exp(-\beta t) [A_1 \sin(\omega_1 t) + B_1 \cos(\omega_1 t)]$$

avec $s_{rp}(t)$, la solution en régime permanent et $s_1(t)$ la solution générale. A_1 et B_1 sont deux constantes définies par les conditions initiales.

1.6. EXCITATION MULTIPLE : PRINCIPE DE SUPERPOSITION

Dans les systèmes dits linéaires, la réponse à la sollicitation de deux ou plusieurs excitations harmoniques est la somme des réponses du système aux différentes sollicitations.

1.6.1. SUPERPOSITION DE DEUX VIBRATIONS DE MÊME FRÉQUENCE

Soient $s_1 = X_1 \cos(\omega t + \alpha_1)$ et $s_2 = X_2 \cos(\omega t + \alpha_2)$ deux vibrations de même pulsation ω . La somme de ces deux mouvements harmoniques peut être exprimée sous la forme

$$(1.67) \quad s = X \cos(\omega t + \alpha)$$

$$\text{avec } X = \sqrt{X_1^2 + X_2^2 + 2X_1X_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}.$$

La phase initiale est donnée par

$$(1.68) \quad \alpha = \alpha_1 + \Delta \text{ avec } \Delta \text{ tel que } X \sin \Delta = X_2 \sin(\alpha_2 - \alpha_1).$$

Dans le cas où les deux amplitudes sont égales (à X_1) et en introduisant le terme $\delta = \alpha_2 - \alpha_1$ pour la différence de phase, on obtient $X = 2X_1 \cos\left(\frac{\delta}{2}\right)$.

Le résultat de cette superposition peut être facilement visualisé en acoustique ou en optique.

La superposition de deux vibrations peut être représentée de façon vectorielle (figure ci-après).

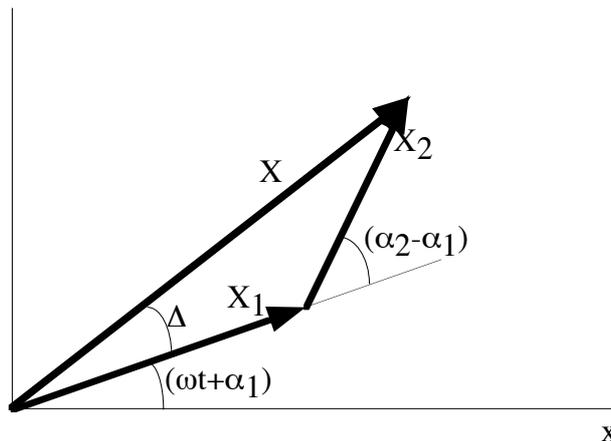


Fig. 2-8 : Représentation vectorielle de la superposition de 2 vibrations de même fréquence.

1.6.2. SUPERPOSITION DE DEUX VIBRATIONS DE FRÉQUENCES DIFFÉRENTES.

Considérons deux vibrations de fréquences ω_1 et ω_2 .

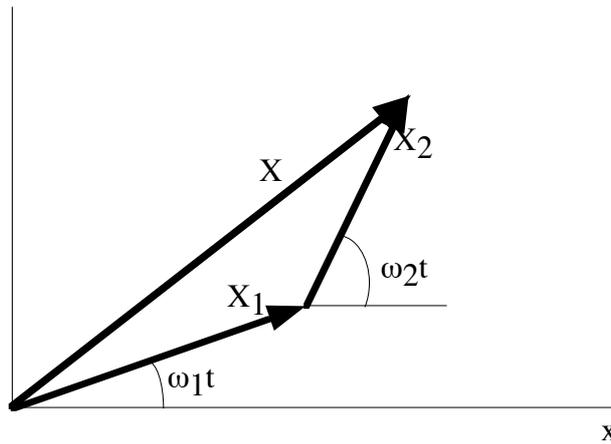


Fig. 2-9 : Représentation vectorielle de 2 vibrations de fréquences différentes

La représentation vectorielle de la superposition est montrée ci-dessus. Dans ce cas, la différence entre les phases varie avec le temps. On observe une périodicité (période T) dans le mouvement résultant si les périodes T_1 et T_2 sont telles qu'il existe 2 entiers n_1 et n_2 vérifiant la relation $T = n_1 T_1 = n_2 T_2$. L'allure précise de la variation temporelle dépend alors des conditions initiales.

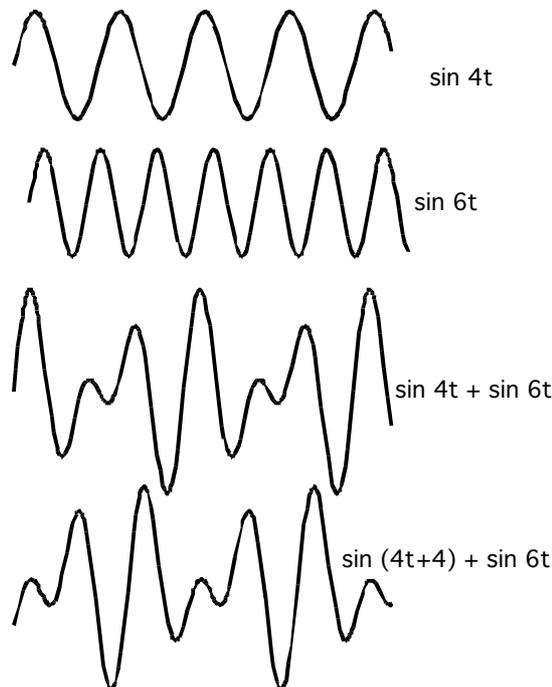


Fig. 2-10 : Superposition de deux variations sinusoïdales de fréquences différentes. La forme du signal résultant dépend des conditions initiales.

1.6.3. CAS OÙ LES FRÉQUENCES SONT PEU DIFFÉRENTES. BATTEMENT.

En faisant la somme de deux vibrations sinusoïdales de même amplitude

$s_1 = X \cos(\omega_1 t)$ et $s_2 = X \cos(\omega_2 t)$, on obtient :

$$(1.69) \quad s = 2X \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right)$$

Lorsque les fréquences sont peu différentes,

$$(1.70) \quad |\omega_1 - \omega_2| \ll \omega_1 + \omega_2$$

le phénomène observé est connu sous le nom de battement. La représentation graphique de la superposition est montrée ci-après. La courbe est constituée d'une sinusoïde de fréquence $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ modulée par une enveloppe définie par la paire d'équations

$$(1.71) \quad s = \pm 2X \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right).$$

Sur la figure ci-dessous, la séparation entre deux minima d'amplitude de l'enveloppe correspond à demi période du battement.

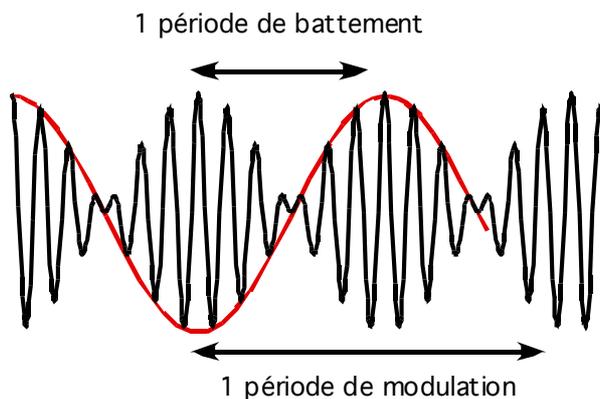


Fig. 2-11 : Superposition de deux vibrations de fréquence légèrement différentes.

Le résultat est connu sous le nom de battement.

Le phénomène de battement peut être facilement observé dans un système mécanique et peut être facilement illustré en acoustique. En optique, le phénomène peut également être mis en évidence et exploité dans certains systèmes de mesure.

1.6.4. RÉPONSE D'UN OSCILLATEUR À UNE EXCITATION PÉRIODIQUE NON SINUSOÏDALE

L'étude de la réponse d'un oscillateur à une excitation sinusoïdale peut être généralisée au cas d'une excitation non sinusoïdale, à condition que celle-ci soit périodique. En effet un signal périodique $f(t)$ de pulsation ω peut être décomposée en une série de fonctions sinusoïdales appelée série de Fourier :

$$f(t) = \sum_0^{\infty} [a_n \cos(n \omega t) + b_n \sin(n \omega t)].$$

Si on reste dans l'approximation linéaire, on peut appliquer le principe de superposition : la réponse de l'oscillateur à l'ensemble des sollicitations est égale à la somme des sollicitations prises séparément.

1.6.5. OSCILLATEURS NON LINÉAIRES

Dans ce chapitre nous avons considéré des systèmes décrits par une équation différentielle linéaire. En pratique, on rencontre aussi des systèmes non linéaires. Une approche numérique est alors nécessaire pour décrire le mouvement.

1.7. OSCILLATEUR MÉCANIQUE EN ROTATION

Les oscillations correspondant à un mouvement de rotation se décrivent de façon analogue aux oscillations en translation. A une force correspond un moment et à la masse correspond le moment d'inertie. Considérons pour illustrer cette situation, le cas du pendule simple.

1.7.1.1. PENDULE SIMPLE

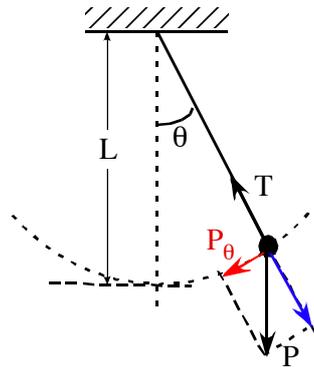


Fig. 1-13 : Pendule simple de faible oscillation ($\sin \theta \approx \theta$).

Le pendule simple est constitué d'une masse ponctuelle m , fixée à un fil de longueur L , de masse négligeable et non déformable. Si le fil est écarté de la verticale, la composante du poids normale au fil, constitue une force de rappel vers la position d'équilibre. Le mouvement de rotation observé est repéré par l'angle θ (élongation angulaire) (figure). Les frottements sont négligés. On écarte le fil de la position verticale et on le lâche sans vitesse initiale. Le théorème du moment cinétique appliqué à ce système donne : $I \frac{d^2\theta}{dt^2} = \text{moment du couple de rappel}$ soit ici

$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = P_\theta L$ où $P_\theta = -mg \sin \theta$ est la composante tangentielle du poids (l'autre composante n'ayant aucune action sur le mouvement de rotation). $I = mL^2$ est le moment d'inertie de la masse par rapport à l'axe de rotation.

Le mouvement est décrit par l'équation :

$$(1.72) \quad mL^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgL \sin \theta .$$

Dans le cas d'une oscillation de faible amplitude ($\theta \leq 10^\circ$, $\sin \theta \approx \theta$ (en rad)) l'équation devient : $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 \theta = 0$. L'oscillation est harmonique avec une pulsation égale à $\omega_0 = \sqrt{g/L}$. soit une période de $T = 2\pi\sqrt{L/g}$. On voit que la fréquence des petites oscillations ne dépend pas de la masse. On trouve un comportement du type OSH.

Notons que le même résultat est obtenu par un raisonnement basé sur la loi de conservation de l'énergie. Lorsque que le pendule est écarté d'un angle θ de sa position d'équilibre, son énergie est égale à :

$$E_{tot} = E_{cin} + E_{pot} = \frac{1}{2}mv^2 + mgL(1 - \cos\theta) = \frac{1}{2}mL^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2}mg\theta^2$$

avec l'approximation des petits angles θ ($\cos \theta \approx 1 - \frac{1}{2}\theta^2$).

L'application du principe de conservation de l'énergie permet d'écrire :

$$\frac{dE}{dt} = mL^2 \frac{d\theta}{dt} \frac{d^2\theta}{dt^2} + mgL\theta \frac{d\theta}{dt} = 0 \quad \text{ou}$$

$$L \frac{d^2\theta}{dt^2} + g\theta = 0 \text{ ou } \frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 \theta = 0 .$$

Le cas des petits angles θ équivaut à considérer que l'énergie potentielle présente une variation parabolique autour de la position d'équilibre.

1.9. OSCILLATEUR ÉLECTRIQUE

1.9.1. L'OSCILLATEUR ÉLECTRIQUE EN RÉGIME LIBRE

1.9.1.1. LE CIRCUIT LC

Les problèmes d'oscillation sont essentiels dans les dispositifs électriques. Les systèmes électriques sont constitués d'éléments actifs et d'éléments passifs.

- Les éléments actifs imposent le transfert d'énergie, sous la forme d'un flux continu ou variable d'électrons, d'une partie du circuit à un autre. Un élément actif peut produire de l'énergie électrique, ou au contraire en consommer. L'énergie produite peut provenir de la transformation d'énergie mécanique (dynamo), photonique (photo détecteur), acoustique, chimique (accumulateur, pile).

- Les éléments passifs altèrent le passage du flux d'électrons ; ce sont les résistances, les bobines d'induction (ou inductance), les condensateurs. Les résistances transforment une partie de l'énergie électrique en chaleur, les bobines transfèrent l'énergie dans le champ magnétique environnant pour ensuite le restituer, les condensateurs en bloquant les charges sur ses armatures, stockent l'énergie dans le champ électrique concentré entre ces armatures.

Les circuits électriques se comportent différemment suivant qu'ils sont constitués de résistances et de condensateurs (ou de résistances et d'inductance) d'une part, et de résistances, d'inductances et de condensateurs simultanément d'autre part. Le circuit RC (ou le circuit RL) se caractérise par une réponse exponentielle alors que le circuit LC se caractérise par une réponse oscillatoire.

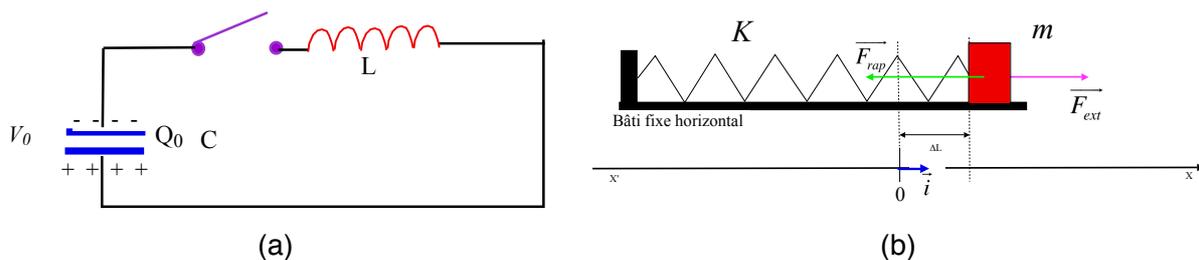


Fig. 1-14 : (a) Circuit LC dont le condensateur porte une charge électrique initiale Q_0 . et (b) son équivalent mécanique.

Considérons une maille constituée d'un condensateur idéal C et d'une inductance idéale L. A un instant initial pris comme origine ($t=0$), le condensateur est chargé (charge Q_0). En conséquence, il existe une DDP V_0 aux bornes du condensateur. Cette situation est analogue à celle d'un système mécanique constitué d'une masse m au bout d'un ressort allongé d'une grandeur ΔL par une force extérieure. L'interrupteur étant ouvert, le circuit contient de l'énergie, du fait de la présence d'un champ électrique entre les bornes du condensateur. Cette énergie (électrique) de départ est égale à :

$$U = U_{el} = \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C}.$$

A $t=0^+$, on ferme l'interrupteur. Un courant $i(t)$ se met à circuler, créant une f.é.m. d'auto-induction dans la bobine $v_L(t)$. La ddp aux bornes du condensateur varie en conséquence, soit $u_C(t)$ cette ddp variable. Le courant variable induit une ddp aux bornes de l'inductance : $u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt}$. Ces ddp (ou tensions électriques) sont représentées sur la figure ci-après en convention « récepteur ».

L'évolution temporelle des grandeurs électriques ($i(t)$ courant dans le circuit, $q(t)$ charge (positive) sur l'armature d'entrée du condensateur,) est obtenue en écrivant la loi des mailles :

$$(1.73) \quad u_C(t) + u_L(t) = 0 \quad \text{ou} \quad L \frac{di(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} = 0.$$

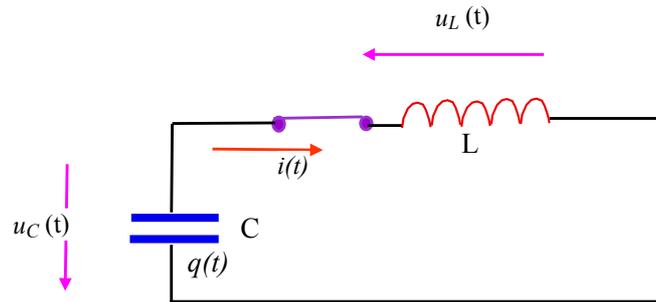


Fig. 1-15 : Courants et tensions dans le circuit fermé en convention récepteur.

Les grandeurs u , i et q désignent les valeurs instantanées des tension, courant et charges qui oscillent autour de la valeur 0. L'état du circuit à un moment donné est donné soit par la valeur de la charge $q(t)$ du condensateur (sur l'armature d'entrée dans la convention récepteur) ou le courant $i(t)$ qui circule, les deux grandeurs étant liées par : $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$.

En ne gardant que la charge, l'équation différentielle s'écrit :

$$(1.74) \quad L \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{C} q = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0$$

en posant $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. L'équation ci-dessus a pour solution

$$(1.75) \quad q(t) = Q_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad \text{dans laquelle } Q_0 \text{ et } \varphi_0 \text{ sont définis par les conditions initiales.}$$

ω_0 correspond à la pulsation du déplacement des charges d'un plateau à l'autre du condensateur.

En choisissant $t = 0$, l'instant où le courant est nul et la charge est égale à Q_0 , on a $q(t) = Q_0 \cos(\omega_0 t)$.

La tension aux bornes du condensateur est donnée par

$$u_C(t) = \frac{q(t)}{C} = U_0 \cos(\omega_0 t)$$

Le courant est donné par :

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = -\omega_0 Q_0 \sin(\omega_0 t) = I_0 \cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Le courant et la charge du condensateur sont déphasés de $\pi/2$. L'amplitude de courant (ou valeur maximale) est égale à $I_0 = \omega_0 Q_0 = \frac{Q_0}{\sqrt{LC}}$.

1.9.1.2. ASPECT ÉNERGÉTIQUE.

L'énergie est sous forme électrostatique dans le condensateur, et magnétique autour de la bobine.

L'énergie du champ électrique du condensateur varie dans le temps avec l'évolution de la charge :

$$e_{el}(t) = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C} \cos^2(\omega_0 t)$$

L'énergie du champ magnétique de l'inductance varie avec l'intensité du courant $i(t)$

$$e_{magn}(t) = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} L (-\omega_0 Q_0 \sin(\omega_0 t))^2$$

ou encore $e_{magn}(t) = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C} [\sin(\omega_0 t)]^2$ (en utilisant la relation $L\omega_0^2 = L \frac{1}{LC} = \frac{1}{C}$).

Les deux formes d'énergie sont échangées périodiquement ; l'énergie totale reste constante.

$$e_{totale} = e_{elec}(t) + e_{magn}(t) = \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C} = const$$

Dans les systèmes réels, l'oscillation est atténuée progressivement par pertes d'énergie par effet Joule dans les résistances qui ne sont jamais nulles.

1.9.1.3. ANALOGIE ÉLECTRO-MÉCANIQUE.

Il est intéressant d'établir des analogies entre système électrique et système mécanique ; c'est particulièrement utile dans les systèmes mixtes. Suivant le système à analyser, il est possible d'utiliser une analogie directe (vitesse → courant électrique) ou indirecte (vitesse → tension électrique) [[Page internet de l'Univ. Du Mans](#)]. Le tableau ci-après résume la correspondance en analogie directe. En utilisant cette analogie, il est parfois possible et plus simple de modéliser un système mécanique complexe par un ensemble d'oscillateurs électriques couplés afin de décrire son comportement.

Système mécanique	Système électrique
Écart par rapport à la position d'équilibre (élongation) : $s(t)$	Charge électrique sur le condensateur : $q(t)$
Vitesse $v(t)$	Intensité du courant dans le circuit $i(t)$
Masse en mouvement m	Inductance L de l'inductance
Raideur du ressort K	Inverse de la capacité du condensateur : $1/C$
Force F	Différence de potentiel (ou tension électrique) U

1.9.2. CIRCUIT ÉLECTRIQUE OSCILLANT AMORTI

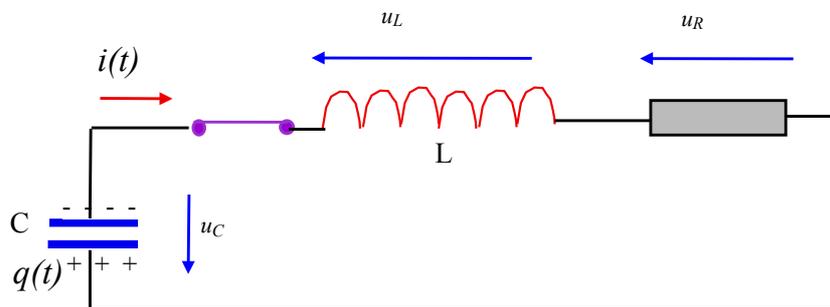


Fig. 1-16 : Circuit électrique R-L-C (tension représentées en convention récepteur)

Dans le cas de l'oscillateur électrique amorti (circuit R-L-C), on obtient une équation analogue à celle d'un système mécanique, la force de frottement visqueux correspondant à la ddp aux bornes de la résistance R. En supposant qu'à l'instant initial le condensateur contient une charge Q_0 , et que l'on ferme le circuit à cet instant, en appliquant la loi des mailles, $v_R + v_L + v_C = 0$ on a :

$$(1.76) \quad L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = 0 .$$

En exprimant le courant i en fonction de la charge, on obtient :

$$(1.77) \quad L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = 0$$

On trouve donc une équation différentielle identique à celle obtenue pour l'oscillateur mécanique :

$$(1.78) \quad \frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0$$

$$\text{avec } \beta = \frac{R}{2L} \text{ et } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} .$$

De la même façon que dans le cas de l'oscillateur mécanique, on cherche une solution sous la forme $q(t) = e^{rt}$ et on obtient l'équation caractéristique

$$r^2 + 2\beta r + \omega_0^2 = 0 .$$

Par un raisonnement identique, on obtient les 3 régimes en fonction de la valeur de la résistance R : pseudopériodique, critique et suramorti. Dans le cas courant du régime pseudopériodique, la charge varie donc dans le temps suivant l'expression :

$$q(t) = Q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega_p t + \varphi_0)$$

$$\text{ou, si à } t = 0 \text{ } q(t) = 0 \text{ et } i(t) = 0, \quad q(t) = Q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega_p t).$$

L'oscillateur est caractérisé par le coefficient de qualité défini précédemment, soit ici :

$$Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} .$$

Le régime pseudopériodique apparaît si $Q > \frac{1}{2}$.

L'aspect énergétique apparaît si on multiplie l'équation différentielle en courant par i :

$$L \frac{di}{dt} i + Ri^2 + \frac{q}{C} i = 0 \quad \text{ou en encore en tenant compte de la relation } i = \frac{dq}{dt} :$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li^2 + \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} \right) = -Ri^2 .$$

En réécrivant sous la forme $d \left(\frac{1}{2} Li^2 + \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} \right) = -Ri^2 dt$, on voit apparaître l'aspect énergétique : la

variation de l'énergie totale de l'oscillateur (énergie magnétique + énergie électrique) pendant un intervalle de temps dt est égale à l'énergie perdue par effet Joule dans la résistance.

On voit ainsi qu'on peut traiter un oscillateur électrique de façon analogue à un oscillateur mécanique en utilisant les correspondances suivantes : $L \Leftrightarrow m$, $R \Leftrightarrow h$, $\frac{1}{C} \Leftrightarrow K$

Les autres grandeurs sont résumées dans le tableau ci-après.

Grandeur	Oscillateur mécanique	Oscillateur électrique
Pulsation propre de l'oscillateur non amorti	$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$	$\sqrt{\frac{1}{LC}}$
Pseudo pulsation (ou pulsation propre de l'oscillateur amorti)	$\omega_p = \sqrt{\frac{K}{m} - \frac{h^2}{4m^2}}$	$\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$
Coefficient d'amortissement	$\beta = \frac{h}{2m}$	$\frac{R}{2L}$
Facteur de qualité	$Q = \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{1}{h} \sqrt{mK}$	$= \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$

Analogie mécanique – électrique

1.9.3. OSCILLATEUR ÉLECTRIQUE EN RÉGIME FORCÉ

1.9.3.1. CIRCUIT RLC ALIMENTÉ PAR UNE TENSION SINUSOÏDALE

Un exemple de circuit électrique oscillant forcé est présenté sur le dessin ci-après : une boucle RLC alimentée par une tension d'excitation de la forme $e(t) = E_{exc} \cos(\omega t)$.

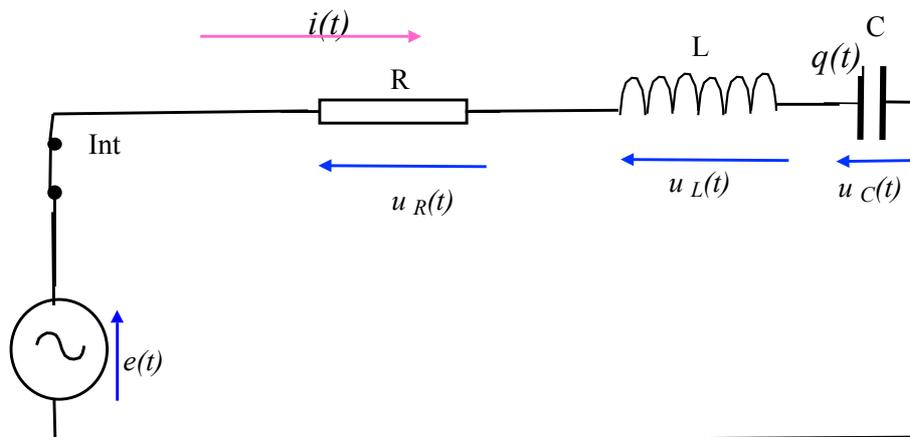


Fig. 2-12 : Circuit R-L-C excité par une tension $e(t)$.

Exprimons la loi des mailles appliquée à ce circuit pour la charge instantanée $q(t)$ du condensateur :

$$(1.79) \quad L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = e(t) \text{ ou } \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = \frac{1}{L} e(t)$$

$$\text{ou encore avec } \frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{1}{L} e(t) \text{ avec } \beta = \frac{R}{2L} \text{ et } \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}.$$

Remarque : L'équation différentielle pour le courant s'obtient par dérivation ($i = \frac{dq}{dt}$) :

$$\frac{d^2i}{dt^2} + 2\beta \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = \frac{1}{L} \frac{de(t)}{dt}.$$

En utilisant l'analogie avec les systèmes mécaniques décrits plus haut, nous pouvons écrire la variation de charge du condensateur sous la forme $q(t) = Q(\omega) \cos(\omega t + \varphi)$ en régime permanent. $Q(\omega)$, l'amplitude de la charge qui circule est égale à :

$$(1.80) \quad Q(\omega) = \frac{E_{exc}}{L \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\beta\omega)^2}}.$$

La tension aux bornes du condensateur varie suivant :

$$u_C(t) = \frac{1}{C} q(t) = \frac{Q(\omega)}{C} \cos(\omega t + \varphi(\omega))$$

Le courant s'obtient en utilisant la relation $i(t) = \frac{dq}{dt} = C \frac{du_C}{dt}$:

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \omega Q(\omega) \sin(\omega t + \varphi(\omega))$$

1.9.3.2. RÉSONANCE ÉLECTRIQUE

Le circuit RLC se comporte de façon analogue à l'oscillateur mécanique. La coïncidence entre la fréquence d'excitation et la fréquence propre se traduit par un phénomène de résonance.

Introduisons le terme $\hat{Q}(\omega) = \frac{Q(\omega)}{Q_{\omega=0}} = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\beta\omega)^2}}$; on peut alors écrire

l'amplitude de la tension aux bornes du condensateur sous la forme $V = \hat{Q} \cdot E_{exc}$. La variation de \hat{Q} en fonction de ω est identique à celle de l'amplitude relative de l'oscillateur mécanique.

À très basses fréquences, l'inductance n'intervient pas, et la ddp aux bornes du condensateur tend vers la tension d'excitation. À la résonance ($\omega = \omega_0$), on a $\hat{Q}(\omega \approx \omega_0) = \frac{\omega_0}{2\beta} = \omega_0 \frac{L}{R}$ et la tension

passse par un maximum $V(\omega \approx \omega_0) = V_{max} = E_{exc} \cdot \omega_0 \frac{L}{R}$.

Le terme $\omega_0 \frac{L}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$ correspond au coefficient de qualité défini précédemment. On a donc : $E_{max} = E_{exc} \cdot Q_{surtens}$. Cette écriture explique le terme de **coefficient de surtension** utilisé pour le coefficient de qualité d'un oscillateur électrique.

De manière identique au cas mécanique, on définit la bande passante à -3dB : $\Delta\omega_{-3dB} = \frac{R}{L}$. En remarquant que $\Delta\omega_{-3dB} = \frac{R}{L} = 2\beta$, on déduit une autre écriture pour le coefficient de surtension :

$$(1.81) \quad Q_{surt} = Q_{qual} = \frac{\omega_{res}}{\Delta\omega_{-3dB}}.$$

Le coefficient de surtension peut donc être évalué de 3 façons :

- par la mesure de la constante de temps τ d'amortissement des oscillations libres :

$$Q_{qual} = \pi \frac{\tau}{T_p},$$

- par la mesure de la largeur à mi-hauteur de la courbe de résonance en puissance absorbée :

$$Q_{qual} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega_{1/2}},$$

- par la mesure de la surtension aux bornes du condensateur à la résonance : $Q_{surtens} = \frac{E_{max}}{E_{exc}}$.

1.9.3.3. RÉPONSE D'UN OSCILLATEUR ELECTRIQUE LINEAIRE À UNE EXCITATION NON SINUSOÏDALE

L'équation différentielle de l'oscillateur s'écrit dans ce cas :

$$(1.82) \quad \frac{d^2s}{dt^2} + 2\beta \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = \frac{1}{K} f(t),$$

les constantes β et K dépendant du système considéré.

Pour un circuit (R, L, C), la grandeur $f(t)$ serait une tension et on aurait

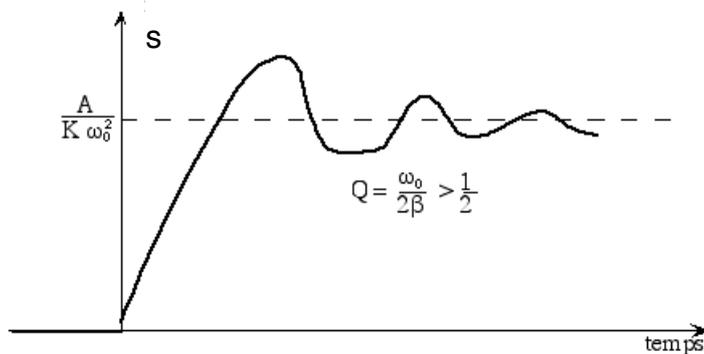
$$(1.83) \quad \beta = \frac{R}{2L}, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ et } K = L.$$

La réponse à un échelon de tension $f(t) = 0$ pour $t \leq 0$ et $f(t) = A$ pour $t > 0$ est égale à :

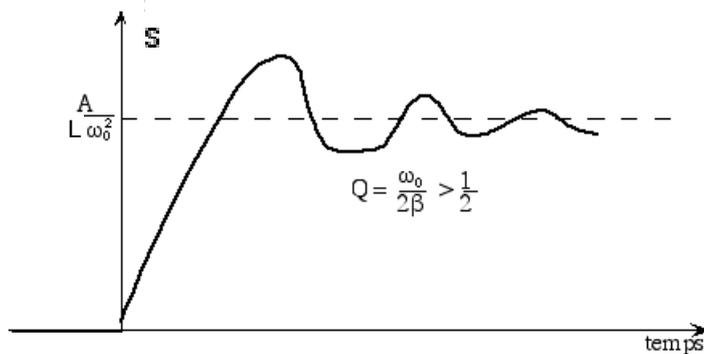
$$(1.84) \quad q = q_1 + \frac{A}{L\omega_0^2}$$

où q_1 , solution de l'équation sans second membre, correspond au régime transitoire.

Nous représentons ci-après le régime transitoire pseudopériodique pour $Q > 1/2$ (a) et le régime apériodique pour $Q < 1/2$ (b)



(a)



(b)

Fig. 2-13 : Réponse d'un circuit RLC à un échelon de tension pour (a) $Q > \frac{1}{2}$ et (b) $Q < \frac{1}{2}$.

La réponse à une excitation périodique (non sinusoïdale) est obtenue en remplaçant $f(t)$ par une série de Fourier. Dans le cas d'un système linéaire, on peut traiter indépendamment chaque harmonique de la force d'excitation.

1.9.3.4. LA PUISSANCE DANS UN CIRCUIT RLC

La puissance instantanée dans un circuit électrique est égale au produit courant x tension. Le même raisonnement que celui réalisé pour les oscillateurs mécaniques montre

- qu'à la résonance, l'énergie stockée est maximale,
- qu'à la résonance le circuit est passif, toute l'énergie fournie est absorbée par la résistance et transformée en chaleur,
- qu'en dehors de la résonance, le circuit est 'réactif' : il y a échange d'énergie entre le circuit et la source. Une situation donnée est caractérisée par le $\cos(\varphi)$, φ étant le déphasage entre le courant dans le circuit et la fém d'excitation.

1.9.4. OSCILLATEUR AUTO-ENTRETENU

Un oscillateur peut commander lui-même la source d'énergie qui l'alimente, on dit alors qu'il est auto-entretenu. C'est le cas du mécanisme d'une horloge ou d'une montre mécanique. Le système se stabilise dans ce cas sur la fréquence propre et donc, on observe une résonance. Le principe général est montré sur le schéma ci-après.

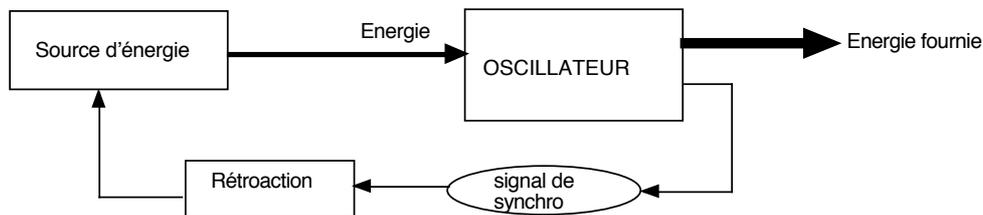


Fig. 2-14 : Principe d'un oscillateur auto entretenu.

L'oscillation dans les circuits électriques est utilisée pour générer des signaux périodiques.

Considérons un oscillateur électrique en régime forcé. Comme pour l'oscillateur mécanique, la réponse est inférieure ou supérieure à l'excitation suivant la fréquence de celle-ci.

$$(1.85) \quad U_s = G U_e$$

G est l'équivalent du coefficient de transmission $\tilde{T} = \frac{\tilde{F}_2}{\tilde{F}_1}$ de la relation (4.22).

Il est toujours possible d'introduire une réaction de la sortie sur l'entrée (une rétroaction).

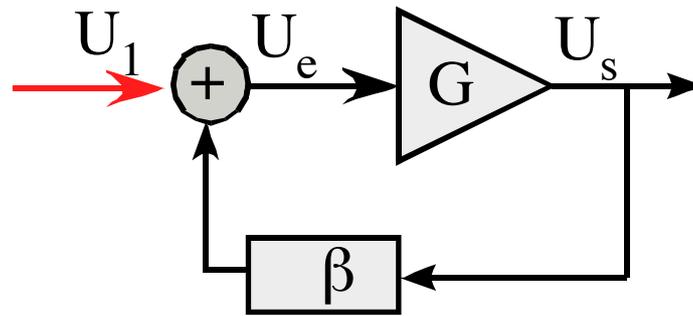


Fig. 2-15 : Amplificateur électrique avec rétroaction.

Dans ce cas la relation entre la tension d'entrée et la tension de sortie devient :

$$(1.86) \quad U_s = G U_1 = G (U_e + \beta U_s)$$

$$\text{ou encore : } U_s = \frac{G}{1 - \beta G} U_e$$

La rétroaction confère à l'amplificateur un gain apparent donné par :

$$(1.87) \quad G_{BF} = \frac{G}{1 - \beta G} \quad , \quad G, \text{ étant le gain en boucle ouverte.}$$

Il apparaît donc que si βG est positif et inférieur à 1, le gain en boucle fermée est plus grand que G ; la réaction est 'positive'.

Un cas limite se présente quand βG est égal à 1. Il en résulte un gain en boucle fermée infini. Cela signifie en pratique que même avec un signal quasiment nul à l'entrée, la sortie est finie. L'amplificateur fonctionne alors en oscillateur. Cet oscillateur peut fonctionner si une source d'énergie y est introduite. Un élément supplémentaire doit fixer la fréquence de fonctionnement. $\beta G > 1$ est la condition d'oscillation. En pratique la puissance de sortie est limitée par l'énergie apportée par l'alimentation.

1.9.4.1. OSCILLATEUR ELECTRIQUE DE RELAXATION

Il existe des dispositifs dont l'oscillation n'est pas due à une action de rappel vers un état d'équilibre, mais dépend de façon plus complexe des paramètres du mouvement. Ce sont les oscillateurs dits de relaxation dont un exemple est le circuit électrique ci-après [Bruneaux-Matricon-p46].

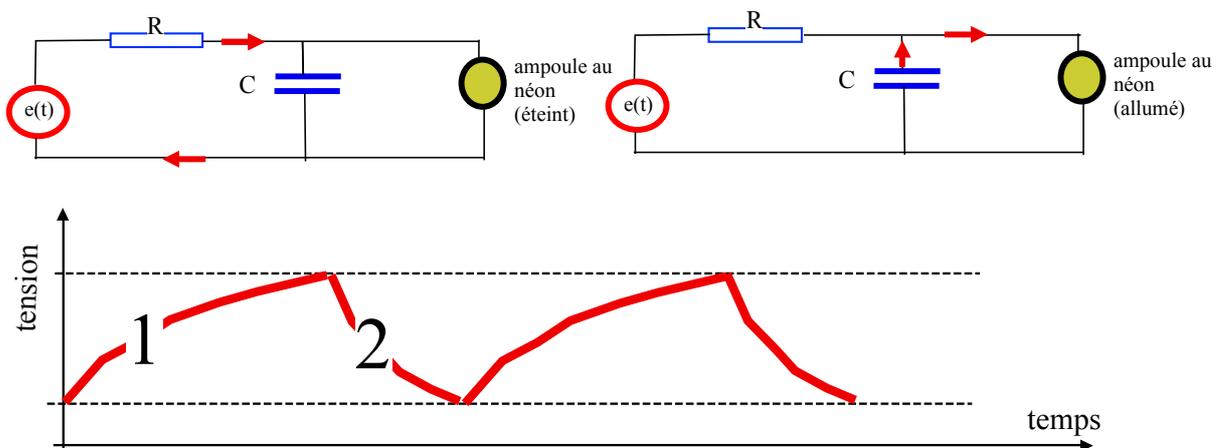


Fig. 1-17 : Oscillateur de relaxation - exemple électrique. Circuit et évolution de la tension

Dans l'exemple ci-dessus, l'ampoule présente une résistance très grande en dessous d'un seuil de tension, le condensateur peut donc se charger. Lorsque le seuil de tension est atteint, la lampe devient conductrice et le condensateur se décharge. Le cycle recommence ensuite.

1.9.5. IMPÉDANCE

1.9.5.1. IMPÉDANCE ÉLECTRIQUE

La notion d'impédance est très utile pour la description des circuits électrique alimentés par des fém sinusoïdales. Considérons le circuit électrique R-L-C ci-après.

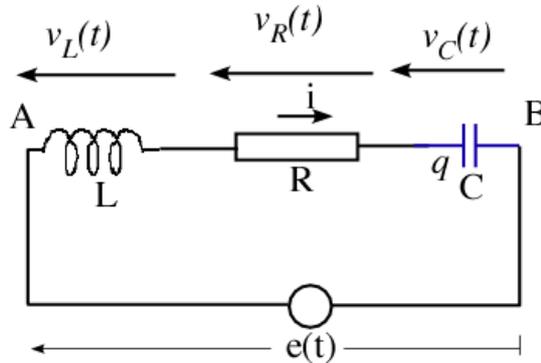


Fig. 2-16 : Circuit oscillant R-L-C excité par une tension sinusoïdale $e(t)$

Le générateur délivre une tension de la forme $e(t) = E_{exc} \cos(\omega t)$. Nous avons vu que le courant dans le circuit, en régime permanent est de la forme $i(t) = I \cos(\omega t + \varphi)$. Il est commode de décrire le comportement du circuit en considérant une excitation sous la forme complexe $e(t) = E_{exc} [\cos(\omega t) + j \sin(\omega t)] = U_{exc} e^{j\omega t}$. Pour obtenir la réponse du circuit à une excitation en cos, on prendra la partie réelle, et pour une excitation en sin, on prendra la partie imaginaire de la solution. L'avantage de cette méthode est que la dérivée et l'intégrale dans l'équation différentielle du circuit

$$\left[L \frac{d(\)}{dt} + R + \frac{1}{C} \int (\) dt \right] i(t) = e(t)$$

correspondent à des multiplications par des nombres réels ou imaginaires ; il en résulte donc une équation algébrique facile à résoudre. Il devient intéressant également d'utiliser le rapport $e/i = Z$ appelé **impédance**. Chaque élément du circuit est caractérisé par une impédance : $Z_L = j\omega L, Z_R = R, Z_C = \frac{-j}{\omega C}$. En utilisant cette notion, l'équation différentielle du circuit devient :

$\left[j\omega L + R - \frac{j}{\omega C} \right] i(t) = e(t)$ ou $Z_{AB} i(t) = e(t)$, $Z_{AB} = \left[R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right]$ étant appelé impédance du dipôle AB.

La grandeur $\varphi = \arctan \left[\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right]$ correspond au déphasage entre le courant dans le dipôle et

la tension appliquée.

On utilise aussi la grandeur $1/Z = Y$ appelée admittance. Z et Y peuvent toujours se mettre sous la forme Z (ou Y) = $a + jb$.

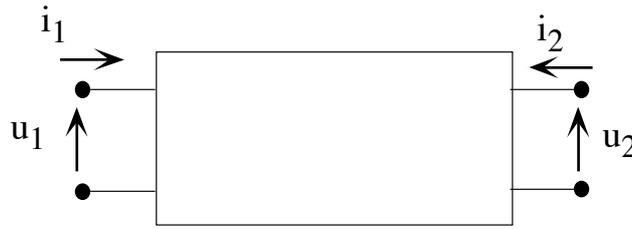


Fig. 2-17 : Représentation conventionnelle d'un quadripôle. u_1 et i_1 : tension et courant pour les bornes d'entrée ; u_2 et i_2 : tension et courant pour les bornes de sortie . Par convention, les courants qui entrent dans le quadripôle sont positifs, ceux qui en sortent sont négatifs.

Dans le cas d'un quadripôle, on définit les impédances suivantes : l'impédance d'entrée à sortie ouverte : $Z_{11} = \left[\frac{u_1}{i_1} \right]_{i_2=0}$, l'impédance de sortie à entrée ouverte : $Z_{22} = \left[\frac{u_2}{i_2} \right]_{i_1=0}$, l'impédance de

transfert à entrée ouverte : $Z_{12} = \left[\frac{u_1}{i_2} \right]_{i_1=0}$ et l'impédance de transfert à sortie ouverte :

$Z_{21} = \left[\frac{u_2}{i_1} \right]_{i_2=0}$. Le quadripôle peut donc être représenté par une matrice impédance $[Z]$:

$$[Z] = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}, \text{ ce qui permet d'utiliser une notation matricielle pour écrire la transformation}$$

$$\text{du couple } \{u, i\} : \begin{bmatrix} u_2 \\ i_2 \end{bmatrix} = [Z] \begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix} .$$

1.9.5.2. ASSOCIATION D'IMPÉDANCES

L'utilisation de la notion d'impédance est pratique pour l'analyse de la réponse des circuits électriques à une tension appliquée. Lorsque les dipôles sont associés en série, l'impédance de l'ensemble Z_T est la somme des dipôles :

$Z_T = Z_1 + Z_2 + Z_3 \dots$ Dans le cas d'une association de dipôles en parallèle, ce sont les admittances qui s'additionnent pour donner l'admittance résultante :

$$Y_T = Y_1 + Y_2 + Y_3 \dots$$

Appliquons la notion d'impédance au circuit R-L-C de la figure 2.15.

$$i(t) = I e^{j\varphi} e^{j\omega t} = \frac{1}{Z_{AB}} U_{exc} e^{j\omega t} \text{ avec } Z_{AB} = j\omega L + R - \frac{j}{\omega C} .$$

On en déduit les expressions pour l'amplitude de courant I et le déphasage φ par rapport à l'excitation $e(t)$:

$$(1.88) \quad I = \frac{U_{exc}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \text{ et } \varphi = \arctan\left(\frac{\frac{1}{\omega C} - \omega L}{R}\right).$$

Considérons maintenant un circuit R-L-C parallèle (figure ci-après).

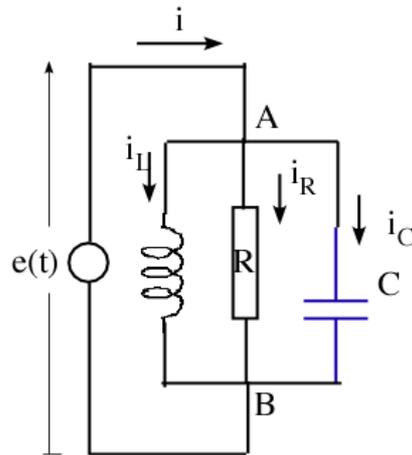


Fig. 2-18 : Circuit R-L-C parallèle

En appliquant la loi des nœuds on obtient :

$$i(t) = (Y_L + Y_R + Y_C) e(t) = \left[\frac{1}{R} + j\omega C - \frac{j}{\omega L} \right] e(t) \text{ qu'on peut encore écrire :}$$

$$i(t) = I e^{j\varphi} e^{j\omega t} = Y_{AB} E_{exc} e^{j\omega t}$$

En écrivant Y_{AB} sous la forme $a+jb$, on obtient I et φ :

$$(1.89) \quad I = U_{exc} \cdot \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)^2} \text{ et } \varphi = \arctan \left(\frac{\omega C - \frac{1}{\omega L}}{1/R} \right).$$

Pour la valeur particulière de pulsation $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, on a $I = \frac{E_{exc}}{R}$ et $\varphi = 0$, ce qui signifie que l'inductance et le condensateur se compensent mutuellement. Aux fréquences tendant vers 0, l'inductance apparaît comme un court-circuit ; aux fréquences élevées, on observe la même chose mais à cause du condensateur.

Considérons enfin le circuit suivant dans lequel le condensateur est en parallèle avec l'inductance et la résistance en série.

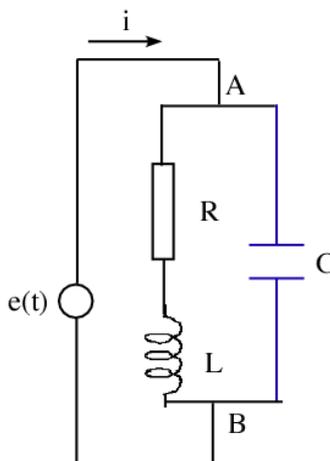


Fig. 2-19 : Circuit RL en parallèle avec un condensateur

Le circuit est constitué de 2 branches d'impédances $Z_{LR} = R + j\omega L$ et $Z_C = \frac{1}{j\omega C}$. Dans ce cas ce sont les admittances qui s'ajoutent : $Y_{AB} = \frac{1}{R + j\omega L} + j\omega C$ ou encore :

$$Y_{AB} = \frac{R - j\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} + j\omega C = \frac{R - j\omega L}{R^2 \left(1 + \frac{(\omega L)^2}{R^2} \right)} + j\omega C$$

Dans le cas $\frac{(\omega L)^2}{R^2} \gg 1$, l'admittance du dipôle s'écrit : $Y_{AB} = \frac{R}{(\omega L)^2} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$.

A la 'résonance' l'amplitude de courant devient $I = \frac{R}{(\omega L)^2}$, soit une valeur faible, avec un déphasage nul, ce qui vaut à ce circuit le nom de 'circuit bouchon'.

1.9.5.3. IMPÉDANCE MÉCANIQUE

La notion d'impédance bien connue en électricité peut être étendue aux systèmes mécaniques. Rappelons d'abord l'analogie entre la relation entre

- la tension U_L aux bornes d'une inductance et la dérivée du courant qui la traverse d'une part,
- la loi de Newton d'autre part :

$$U_L = L \frac{di}{dt} \text{ analogue à } F = m \frac{dv}{dt}$$

De même, il y a une correspondance entre

- la loi entre la tension U_C aux bornes d'un condensateur et la charge Q stockée et
- la relation entre la force de rappel d'un ressort et son allongement :

$$U_C = \frac{1}{C} \int i dt \text{ analogue à } F = K \int v dt .$$

Par analogie avec les systèmes électriques, on peut définir une 'inertance' Z_i par l'expression :

$$Z_i = j \omega m$$

ainsi qu'une 'élastance' ou équivalent mécanique de la capacitance, soit

$$-\frac{j}{C\omega} \rightarrow -\frac{jK}{\omega} = Z_e .$$

Une autre analogie existe entre un coefficient de frottement d'amortissement h et une résistance électrique R . En utilisant la notion d'impédance, et en prenant comme variable la vitesse $v = \frac{ds}{dt} = j\omega s$, l'équation dynamique $m \ddot{s} + h \dot{s} + Ks = F_1$ de l'oscillateur mécanique forcé peut se mettre sous la forme :

$$(1.90) \quad F_1 = \left[h + j \left(m\omega - \frac{K}{\omega} \right) \right] v \text{ on obtient la relation fondamentale suivante :}$$

$$(1.91) \quad F_1 = Z_m v ,$$

$$(1.92) \quad Z_m = \sqrt{(h)^2 + \left(m\omega - \frac{K}{\omega}\right)^2} \text{ étant l'impédance mécanique de l'oscillateur amorti.}$$

Remarque : La notion d'impédance n'est pas très utilisée en mécanique ; cependant c'est une notion utile lorsqu'il s'agit d'analyser un système mécanique vibrant couplé à un système électrique (haut-parleur, transducteur piézzo électrique, ..).

1.10. ANNEXES

1.10.1. A1 -TABLEAUX RÉCAPITULATIFS

1.10.1.1. CORRESPONDANCE ENTRE LES DIFFÉRENTS TYPES D'OSCILLATEURS

	Oscillateur masse-ressort	Pendule de torsion	Oscillateur électrique
paramètre	Elongation s	Angle θ	Charge q
Vitesse vibratoire	\dot{s}	$\dot{\theta}$	Courant i
'inertie'	Masse m	J	L
Composant de rappel	Raideur K	Raideur en torsion C	$1/C$
Rappel	$F = -K s$	$-C \theta$	$u = q/C$
Energie (potentielle)	$\frac{1}{2} K S_{\max}^2$	$\frac{1}{2} C \theta_{\max}^2$	$\frac{1}{2} C u_{\max}^2$
Energie (cinétique)	$\frac{1}{2} m V^2$	$\frac{1}{2} J \dot{\theta}^2$	$\frac{1}{2} L I^2$

1.10.1.2. OSCILLATEUR MÉCANIQUE LIBRE A 1DDL : LES PRINCIPAUX PARAMÈTRES.

Paramètre	Symbole	Unité	Expression
Force résultante	F	N	$F = m \frac{d^2s}{dt^2} = -h \frac{ds}{dt} - ks$
Élongation	s	m	$s(t) = A_0 \exp(-\beta t) \cos[(\omega_p t + \varphi_0)]$
Coefficient de frottement	h	$kg.s^{-1}$	$h = -\frac{F_{frott}}{vitesse}$
Coefficient d'amortissement	β	s^{-1}	$\frac{h}{2m}$
Coefficient de qualité	Q		$Q = 2\pi \frac{\text{Energie de l'oscillateur}}{\text{Energie perdue sur une période}} \approx \frac{1}{h} \sqrt{mK}$
Pulsation, Fréquence, Période propre	ω_0, f_0, T_0	rad/s, Hz	$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}, f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{m}}, T_0 = 1/f_0$
Pulsation de l'oscillateur amorti (pseudo-pulsation)	ω_p	s^{-1}	$\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} = \sqrt{\frac{K}{m} - \frac{h^2}{4m^2}}$
fréquence – période et période propre de l'oscillateur amorti	T_p, f_p	s	$f_p = \frac{\omega_p}{2\pi}, T_p = \frac{2\pi}{\omega_p}$

Décrément logarithmique	δ		$\delta = \beta T_p = \ln \left(\frac{s(t)}{s(t+T_p)} \right)$
-------------------------	----------	--	---

1.10.1.3. OSCILLATEUR MÉCANIQUE FORCÉ :

Grandeur	Symbole	Unité	Relation
Force résultante	F	N	$F = m \frac{d^2 s}{dt^2} = -h \frac{ds}{dt} - Ks + F_{exc} \cos(\omega t)$
Elongation instantanée en régime permanent	s	m	$s(t) = X(\omega) \cos[\omega t + \varphi(\omega)]$
Amplitude	X	m	$X(\omega) = \frac{F_{exc}}{\sqrt{(-m\omega^2 + K)^2 + h^2\omega^2}}$
Déphasage de la réponse par rapport à l'excitation	φ	rad	$\varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{-\omega h}{-m\omega^2 + K}\right)$
Pulsation propre, Fréquence propre	ω_0, f_0	rad/s, s	$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}, f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{m}}$

1.10.1.4. OSCILLATEUR ÉLECTRIQUE

Grandeur	Symbole	Unité	Relation
Amplitude de charge en régime forcé	$Q(\omega)$	C	$Q(\omega) = \frac{E_{exc}}{L \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\beta\omega)^2}}$
Largeur du pic de résonance	$\Delta\omega_{-3dB}$	Hz	$\Delta\omega_{-3dB} = \frac{R}{L} = 2\beta$
Coefficient de surtension	Q_s		$Q_{surt} = Q_{qual} = \frac{\omega_{res}}{\Delta\omega_{-3dB}}$
Impédance du circuit série	Z	Ohms	$R + j\omega L - \frac{j}{\omega C}$

1.10.2. UTILISATION DES NOMBRES COMPLEXES EN PHYSIQUE DE VIBRATIONS.

1.10.2.1. NOMBRE COMPLEXE

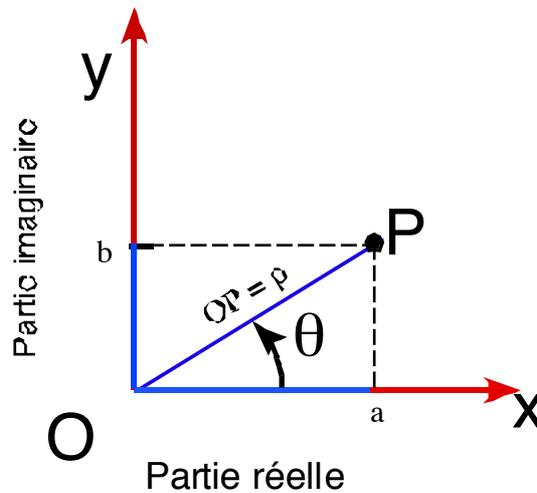


Fig. 1-18 : Représentation d'un nombre complexe par un point P(a,b) dans un plan .

Les nombres complexes sont très utiles pour traiter les problèmes de vibrations et d'ondes. Un nombre complexe est l'image dans le plan d'un point P. L'abscisse correspond à la partie réelle ; l'ordonnée correspond à la partie imaginaire. Le nombre s'écrit :

$\tilde{z} = (a,b) = a + jb$ (forme algébrique), avec j un *nombre imaginaire* tel que $j^2 = -1$ (en maths on utilise en général $[i]$ à la place de $[j]$), avec $a = \rho \cos(\theta)$, $b = \rho \sin(\theta)$, ou encore :

$a = \text{Re}[\tilde{z}]$ la partie réelle du nombre et $b = \text{Im}[\tilde{z}]$ la partie imaginaire.

La correspondance entre nombre complexe et point dans un plan permet d'écrire :

$$\tilde{z} = \rho [\cos(\theta) + j \sin(\theta)] \text{ (forme trigonométrique du nombre complexe } z).$$

$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ est le *module* du nombre \tilde{z} ,

$\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$, défini à 2π près est l'*argument* (ou *phase*) de \tilde{z} .

Les opérations sur les nombres complexes sont identiques à celles sur les nombres réels, avec en plus le nombre imaginaire j défini plus haut.

Il est parfois utile de considérer le conjugué d'un nombre complexe donné par ($\bar{\tilde{z}}$ ou \tilde{z}^*) :

$$\bar{\tilde{z}} = x - jy = \rho e^{-j\theta} = \rho [\cos(\theta) - j \sin(\theta)] = \rho [\cos(-\theta) + j \sin(-\theta)] .$$

On montre que les nombres complexes permettent d'écrire la relation suivante (relation d'Euler) :

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j \sin\theta .$$

Il en résulte la forme exponentielle de l'écriture d'un nombre complexe :

$$\tilde{z} = \rho e^{j\theta} . \text{ On déduit de la relation d'Euler que : } e^{j\frac{\pi}{2}} = j \text{ et } e^{j\pi} = -1 .$$

Somme, produit et quotient de 2 nombres complexes :

Soient les 2 nombres complexes : $\tilde{z}_1 = a_1 + j b_1 = \rho_1 e^{j\theta_1}$ et $\tilde{z}_2 = a_2 + j b_2 = \rho_2 e^{j\theta_2}$

La somme de ces 2 nombres est égale à :

$$\tilde{z}_1 + \tilde{z}_2 = (a_1 + a_2) + j (b_1 + b_2)$$

Le produit et le quotient s'expriment facilement à partir de la forme exponentielle :

$$\tilde{z}_1 \cdot \tilde{z}_2 = \rho_1 \rho_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)} \quad \text{et} \quad \frac{\tilde{z}_1}{\tilde{z}_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$$

1.10.2.2. MOUVEMENT CIRCULAIRE ET OSCILLATION.

Un mouvement d'oscillation harmonique présente une analogie avec les mouvements circulaires. Considérons la figure ci-après.

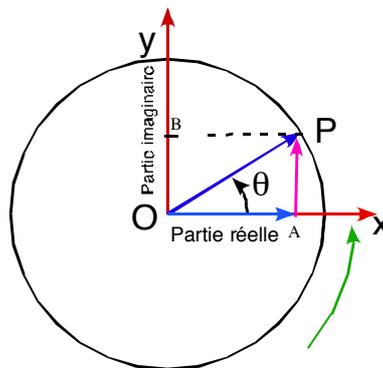


Fig. 1-19 : Correspondance entre un nombre complexe et le plan.

La figure représente un vecteur tournant \vec{OP} , de module ρ ($|\vec{OP}| = \rho$) à une vitesse constante $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$ dans un plan xOy. L'extrémité P du vecteur \vec{OP} décrit un cercle. En projetant \vec{OP} sur les axes Ox et Oy, on peut écrire : $\vec{OP} = \vec{OA} + \vec{OB}$ avec :

$$|\vec{OA}| = \rho \cos(\theta) \quad \text{et} \quad |\vec{OB}| = \rho \sin(\theta).$$

Cette représentation est dite de Frenel ou du vecteur tournant. On peut l'utiliser pour représenter un mouvement d'oscillation harmonique $s(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ si on remplace θ par $\omega_0 t + \varphi_0$ et ρ par le terme d'amplitude A_0 .

Le vecteur peut être représenté par le nombre complexe \tilde{z} tel que

$$(1.93) \quad \tilde{z} = \rho [\cos(\theta) + j \sin(\theta)] = \rho e^{j\theta}.$$

On voit alors que l'expression d'un mouvement oscillatoire harmonique $s(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ correspond à la partie réelle d'un nombre complexe de module $\rho = A_0$ et d'argument $\theta = \omega_0 t + \varphi_0$. L'oscillation harmonique peut donc s'écrire en utilisant les complexes :

$$(1.94) \quad \tilde{s}(t) = A_0 e^{j(\omega_0 t + \varphi_0)}.$$

Avec cette notation on a $\dot{\tilde{s}} = j\omega \tilde{s}$ et $\ddot{\tilde{s}} = j\omega \cdot j\omega \tilde{s} = -\omega^2 \tilde{s}$.

En pratique, on peut donc mener les calculs en utilisant la notation complexe, et revenir aux réels à la fin. Cette approche est très fructueuse en analyse de vibrations.

1.10.3. - EXEMPLES DE SYSTÈMES MÉCANIQUES OSCILLANTS ÉQUIVALENTS AU SYSTÈME MASSE-RESSORT

1.10.3.1. INTRODUCTION

De nombreux systèmes mécaniques se comportent en oscillateur harmonique simple. L'oscillation est provoquée par des actions dynamiques sur des éléments présentant une position d'équilibre statique. L'oscillation peut avoir lieu avec des parties rigides ou en déformation. D'un point de vue technique les oscillations peuvent être :

- nuisibles (source de bruit, d'usure, ..) ou
- utiles (transfert d'énergie).

1.10.3.2. EXEMPLES D'OSCILLATEURS MÉCANIQUES : SYSTÈMES EN TRANSLATION

Tout système constitué d'éléments élastiques et de masses localisées se comporte comme le système masse-ressort examiné ci-dessus. C'est le cas lorsque l'axe de l'oscillateur n'est pas horizontal. Dans ce cas le poids des corps en mouvement et l'orientation de l'axe déterminent une position de repos dans laquelle le ressort est déformé. C'est le cas également si le ressort est remplacé par une poutre élastique .

Le système masse-ressort est utilisé dans tous les problèmes de suspension élastique. Dans ces situations, la notion de déflexion statique sous charge nominale est utile. Il s'agit de la déformation ds du ressort sous le poids d'une masse m.

$$K_{eq} ds = Mg \quad \text{ou} \quad ds = Mg / K_{eq} .$$

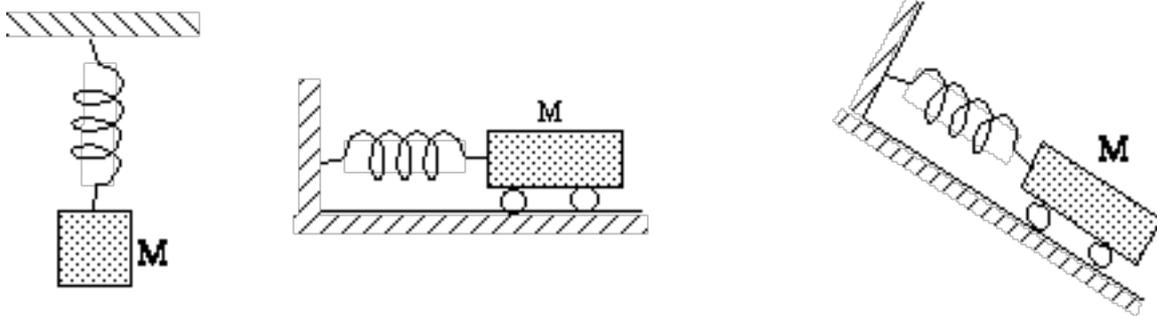


Fig. 1-20 : Systèmes à 1 degré de liberté : masse+ressort dans diverses positions. Le comportement dynamique est indépendant de la position.

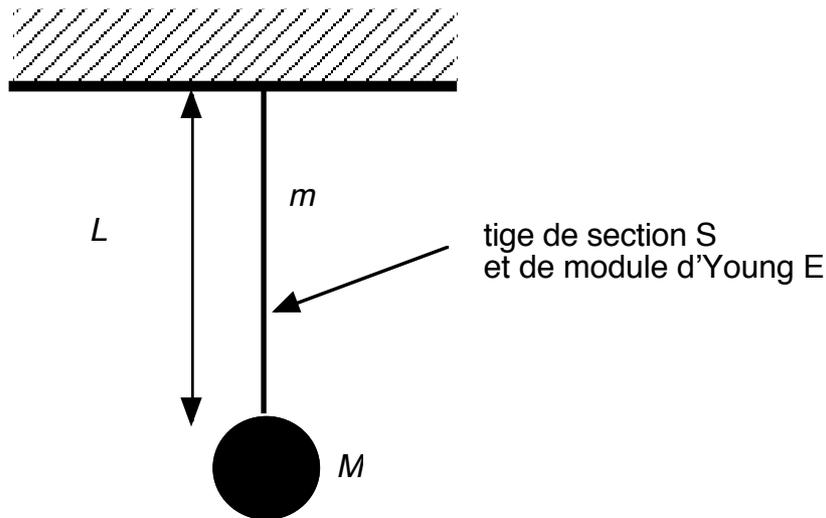


Fig. 1-21 : Systèmes à 1 degré de liberté : Masse accrochée à une tige élastique.

Le système montré ci-dessus constitué d'une masse M accrochée à une poutre verticale de masse m (en extension) est équivalent à un oscillateur masse-ressort avec une constante équivalente de rappel

$$K_{eq} = \frac{E S}{L} \text{ et une masse équivalente } M_{eq} = M + \frac{m}{3}.$$

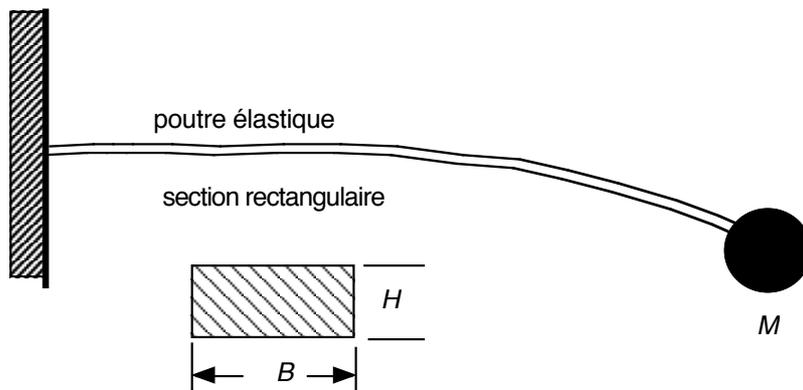


Fig. 1-22 : Systèmes à 1 degré de liberté : Masse M au bout d'une poutre horizontale de masse m .

Le système ci-dessus constitué d'une masse accrochée à une poutre horizontale (en flexion) est équivalent à un oscillateur masse-ressort avec une constante équivalente de rappel $K_{eq} = \frac{3 EI}{L^3}$

$$\text{avec } I = \frac{B H^3}{12} \text{ et une masse équivalente } M_{eq} = M + \frac{m}{4}.$$

1.10.4. OSCILLATIONS ANGULAIRES : SYSTÈMES EN ROTATION AUTOUR D'UN AXE FIXE

1.10.4.1. PENDULE PESANT COMPOSÉ

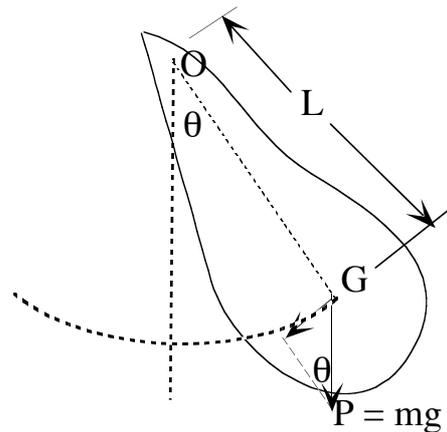


Fig. 1-23 : Pendule pesant.

Le pendule pesant est constitué d'une masse répartie. La force de rappel sur le pendule écarté de sa position d'équilibre est égale à $m g \sin \theta$. L'équation de mouvement est obtenue à partir du principe fondamental de la dynamique des corps en rotation : Moment des forces par rapport à l'axe de rotation = produit du moment d'inertie par l'accélération angulaire, soit :

$$(1.95) \quad I \frac{d^2\theta}{dt^2} + m g L \sin \theta = 0$$

où I est le moment d'inertie (des forces s'appliquant au centre de gravité G). Pour des oscillations de faible amplitude, la pulsation est égale à $\omega_0 = \sqrt{\frac{mgL}{I}}$.

Remarque : Si la masse est concentrée en G , on a $I = mL^2$ et on retrouve la pulsation du pendule simple.

1.10.4.2. PENDULE DE TORSION

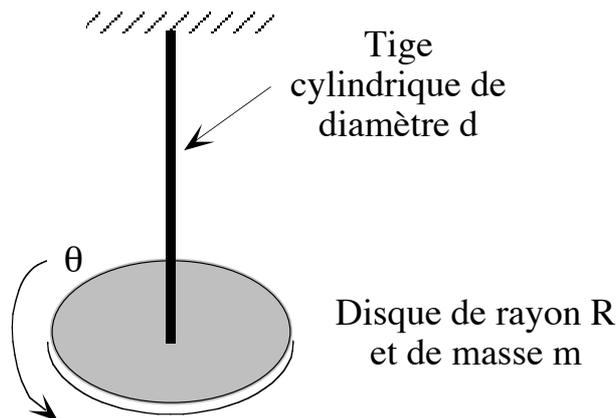


Fig. 1-24 : Disque plein suspendu à une poutre, en rotation dans un plan horizontal. θ est l'élongation angulaire (ou angle de rotation du disque)

Considérons un système constitué d'un disque rigide, fixé à un support considéré indéformable à l'aide d'une tige élastique. Le disque est solidaire de la tige. Le mouvement de rotation du disque dans son plan se traduit par une énergie cinétique de rotation pour le disque et une énergie potentielle de torsion pour la tige. La tige est assimilable à un ressort spiral et se caractérise lorsqu'il est déformé en torsion par une raideur en torsion C [$N \cdot rad^{-1}$] analogue à la constante de rappel en translation d'un

ressort à boudin. On a (de la RdM) : $C = \frac{\pi d^4 G}{32 L}$ avec $G = \frac{E}{2(1 + \epsilon)}$, le module de Coulomb ; $\epsilon \approx 0,3$ est le coefficient de Poisson. Le disque plein (équivalent de la masse du système m-K) se caractérise par un moment d'inertie massique $I = \frac{1}{2} m R^2$.

L'équation du mouvement est obtenue à partir du théorème du moment cinétique (défini par rapport à la position d'équilibre) :

$-I \frac{d^2\theta}{dt^2} - C \theta = 0$ soit $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 \theta = 0$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{I}}$, soit la même forme que pour un système en translation.

1.10.5. LE PISTON À AIR ET LE RÉSONATEUR DE HELMHOLTZ

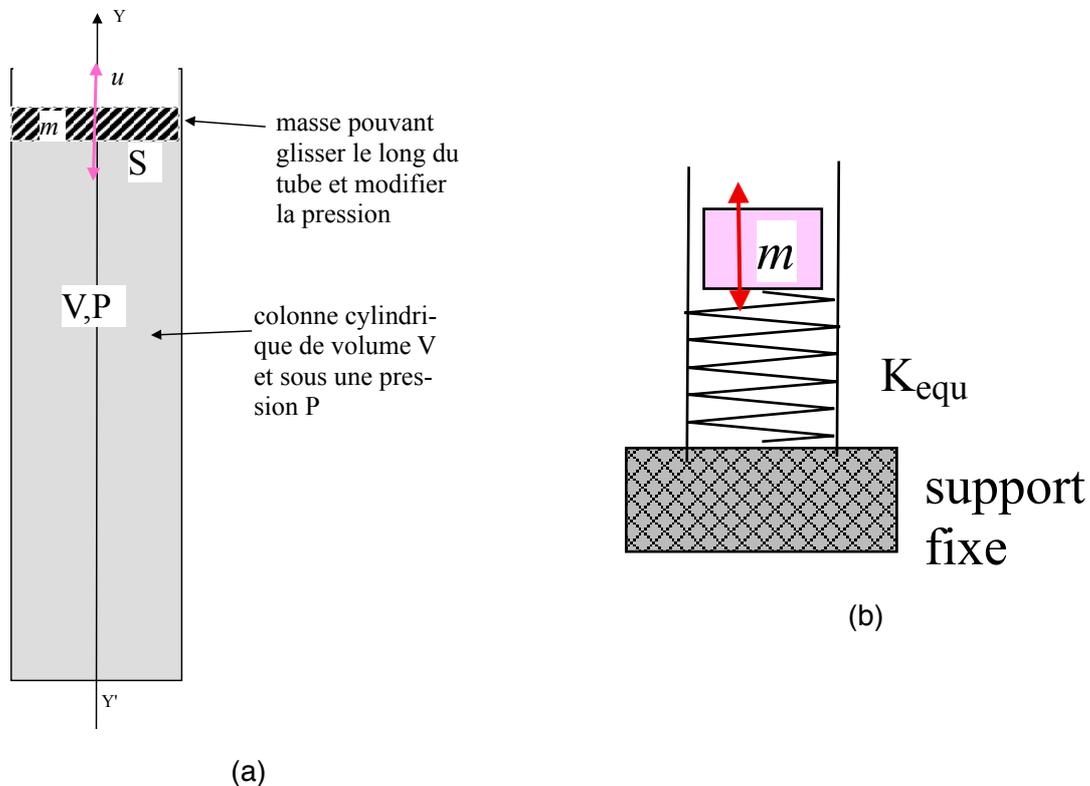


Fig. 1-25 : Piston à air et son équivalent mécanique. Le mouvement de la masse m sur la colonne de gaz (a) est similaire à celui d'un oscillateur masse-ressort classique.

Un piston constitué d'une masse m appuyant sur une colonne de gaz est équivalent à un oscillateur du type m-K. Soit S la section de la colonne. La variable du mouvement est le déplacement u de la masse m . Dans l'hypothèse où l'amortissement est négligeable, il n'y a pas de dissipation d'énergie. La compression est adiabatique (pas d'échange de chaleur avec l'extérieur) et l'équation de Laplace

$$(1.96) \quad P V^\gamma = \text{Const}$$

peut être appliquée où γ est le rapport $\frac{C_P}{C_V}$ du gaz, $C_{P,V}$, la chaleur spécifique à pression constante (indice P) et à volume constant (indice V) ($\gamma = 1,67$ pour les gaz monoatomiques, 1,4 pour les gaz

diatomiques). Pour de petits déplacements u autour de la position d'équilibre, la force de rappel est égale à : $F_{rap} = \delta p \cdot u$. La variation de pression est donnée par :

$$(1.97) \quad \delta p = -\gamma \frac{P}{V} \delta V = -\gamma \frac{P}{V} S \cdot u \quad \delta p = -\gamma \frac{P}{V} \delta V$$

ce qui donne une force de rappel de

$$(1.98) \quad F_{rap} = \delta p \cdot S = -\gamma \frac{P}{V} S^2 \cdot u$$

En appliquant la seconde loi de Newton à la mini colonne, on obtient :

$$(1.99) \quad m \frac{d^2 u}{dt^2} = -\gamma \frac{P}{V} S^2 u \quad \text{où on reconnaît l'équation d'un oscillateur :}$$

$$(1.100) \quad \frac{d^2 u}{dt^2} + \omega_0^2 u = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\gamma \frac{P S^2}{V m}} .$$

On a pour le ressort équivalent, une raideur K_{eq} :

$$(1.101) \quad K_{eq} = \frac{\gamma P S^2}{V} .$$

On en conclut que le système ci-dessus se comporte en oscillateur de pulsation propre :

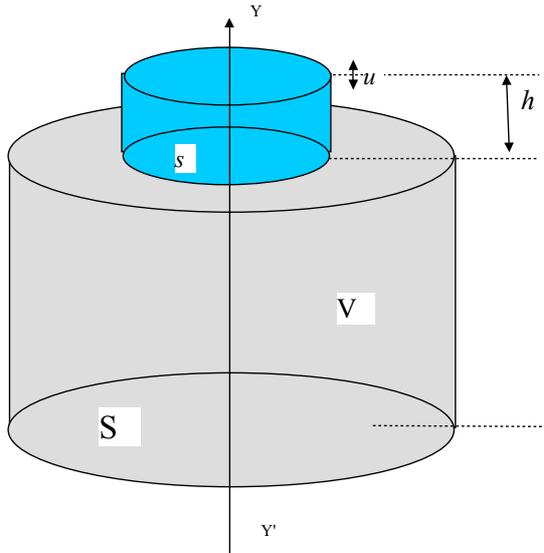
$$(1.102) \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{K_{eq}}{m}} = \sqrt{\frac{\gamma P S^2}{m V}} .$$

Remarque : On peut aussi exprimer la pulsation en fonction du coefficient de compressibilité du gaz (en conditions adiabatiques) $\chi = -\frac{1}{V} \left(\frac{dV}{dP} \right) = \frac{1}{\gamma P}$ étant donné que $\delta p = -\gamma \frac{P}{V} \delta V$ et donc

$$\frac{1}{\gamma P} = -\frac{1}{V} \frac{\delta V}{\delta P} .$$

Dans le cas où le tube n'est pas fermé par une masse m , il y a vibration libre de la masse de gaz contenue dans le tube (**résonateur de Helmholtz**). Le formalisme indiqué ci-dessus reste valable, il suffit de remplacer la masse m par la masse de la couche d'épaisseur de gaz déplacé à l'entrée du tube.

Considérons le cas particulier d'un récipient cylindrique, de section S et de hauteur H (figure) disposant d'un goulot d'admission assimilable à un cylindre de section s et de hauteur h (figure ci-dessous).



Une perturbation à l'entrée du récipient cause un déplacement de l'air dans l'ouverture (le volume $s.h$), soit u ce déplacement. En conséquence, la pression p dans le récipient varie de δp . Cette variation de pression entraîne l'apparition d'une force de rappel qui tend à ramener la colonne de gaz $s.h$ dans sa position de départ (équilibre).

En supposant que le gaz est parfait, la variation de pression est reliée à la variation de volume par la relation

$$\frac{dp}{P} = -\gamma \frac{dV}{V} \quad \text{avec } \gamma = \frac{C_p}{C_v} .$$

Le déplacement de la colonne d'entrée cause la variation du volume disponible pour le gaz se trouvant dans le récipient de : $\delta V = s \cdot u$

On peut donc écrire l'expression pour la variation de pression δp :

$$\delta p = -\gamma \frac{P}{V} s \cdot u \quad \text{soit une force de rappel de } F_{rap} = \delta p \cdot s = -\gamma \frac{P}{V} s^2 \cdot u .$$

En appliquant la seconde loi de Newton à la mini colonne, on obtient :

$$\rho s h \frac{d^2 u}{dt^2} = -\gamma \frac{P}{V} s^2 u \quad \text{où on reconnaît l'équation d'un oscillateur :$$

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \omega_0^2 u = 0 \quad \text{avec } \omega_0 = \sqrt{\gamma \frac{P s}{V \rho h}} = c \sqrt{\frac{s}{V h}} \quad (c \text{ célérité du son}) .$$

1.10.6. LE PENDULE LIQUIDE

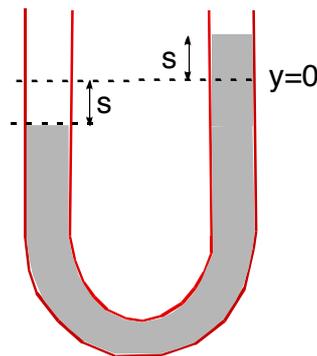


Fig. 1-26 : Oscillation d'une colonne de liquide dans une tube en U.

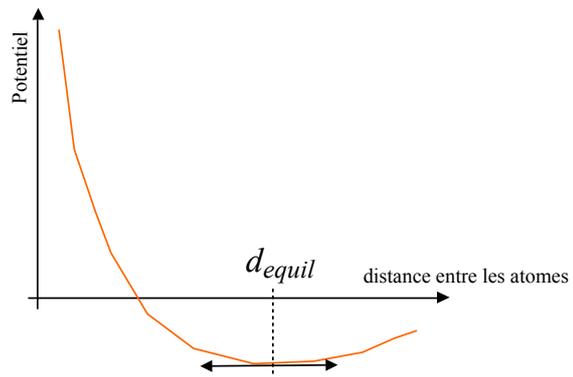
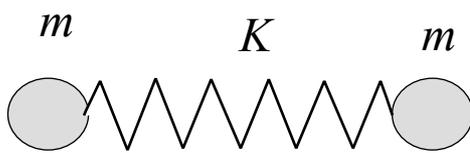
Une colonne de liquide dans un tube en U se comporte en oscillateur. Soit le système ci-dessus constitué d'un tube de section S , rempli d'une colonne de longueur L d'un liquide de densité ρ . Le liquide est déplacé d'une hauteur s puis laissé libre. La force de rappel est constituée du poids du liquide déplacé, soit celle d'une colonne de hauteur $2s$. La 2^{ème} loi de la dynamique s'écrit :

$$(1.103) \quad m \frac{d^2 s}{dt^2} = -2 s \rho g S$$

$m = \rho SL$ étant la masse de toute la colonne de longueur L qui se déplace. Il en résulte un mouvement périodique de période de pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{2g}{L}}$ et de période $T = 2\pi\sqrt{L/2g}$.

1.10.7. LA LIAISON ATOMIQUE

Considérons une molécule di atomique, comme la molécule d'hydrogène. Les 2 atomes sont maintenus à une distance déterminée par un équilibre entre les forces répulsives et les forces attractives. Cette interaction se traduit par un potentiel pour les atomes, qui présente un minimum, le système présentant alors une analogie avec une bille au fond d'une cuvette¹.



Une molécule di atomique se comporte comme un oscillateur mécanique constitué de 2 masses reliées par un ressort

Les 2 atomes sont placés dans un potentiel qui présente un minimum pour une distance donnée.

Fig. 1-27 : Molécule di atomique et son puits de potentiel

Les deux atomes de la molécule di atomique (H_2 , N_2 , ...) sont maintenus à distance fixe par une force de rappel analogue à celle d'un ressort dont on peut déterminer la raideur K . La force de liaison est dérivée du potentiel comme suit :

$$F = - \left(\frac{d^2V}{dx^2} \right)_{x=d_{\text{equil}}} (x - d_{\text{equil}})$$

ce qui correspond à une raideur équivalente de ressort égale à $K_{\text{equiv}} = \left(\frac{d^2V}{dx^2} \right)_{x=d_{\text{equil}}}$.

La modélisation de l'oscillateur amène à une pulsation donnée par l'expression : $\omega_0 = \sqrt{\frac{2K_{\text{equiv}}}{m}}$. Dans le cas où les atomes ne sont pas identiques (C-O par exemple), la masse à prendre en considération est $m_{\text{equiv}} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$.

¹ Ondes et vibrations, M. Nicolas, Dunod, 2009, p 21

1.10.1. AUTRE EXEMPLE D'OSCILLATEUR : LA SEICHE DES LACS

On appelle seiche l'oscillation du niveau de l'eau dans une baie ou un lac, provoquée par une différence locale de pression atmosphérique, ou par un vent localisé sur un côté du plan d'eau. Lorsque la différence de pression disparaît la masse liquide oscille dans son ensemble, un peu comme l'eau d'une baignoire.

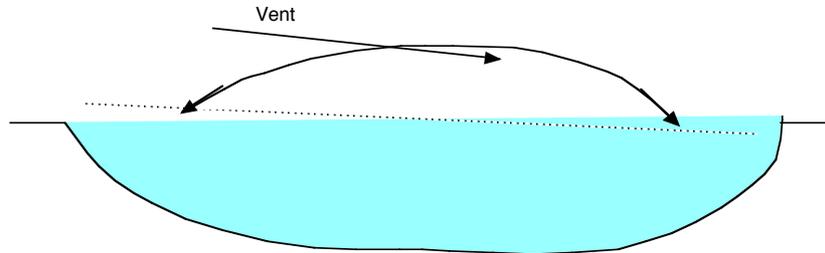


Fig. 1-28 : Seiche : Oscillation d'une masse d'eau (lac)

1.10.2. LES FROTTEMENTS EN MÉCANIQUE

1.10.2.1. FROTTEMENTS SECS

Dans les systèmes mécaniques, le frottement entre deux corps solides en mouvement, produit une force proportionnelle à la réaction du support. Cette force de glissement (dite force de Coulomb), s'oppose à la vitesse mais ne dépend pas de celle-ci :

$$F_{fs} = - \text{sign}(\vec{v}) \mu F_s$$

avec μ : coefficient de frottement et F_s , la réaction normale du support.

L'équation du mouvement devient dans ce cas :

$$m \frac{d^2s}{dt^2} + ks - \text{sign}(\vec{v}) mF_s = 0.$$

Il n'y a pas dans ce cas de solution analytique générale. On montre cependant que l'amplitude des oscillations décroît linéairement avec le temps, que la période des oscillations est la même que pour l'oscillateur sans amortissement. La position finale du mouvement, peut être différente de la position de repos. L'oscillateur s'immobilise dès que l'amplitude devient inférieure à un écart x_0 tel que pour x_0 la force de frottement équilibre la force de rappel.

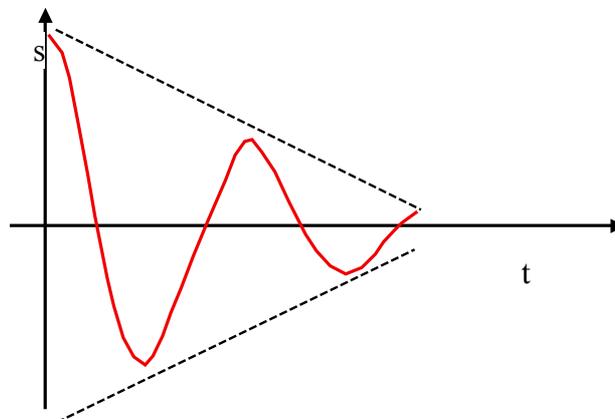


Fig. 1-29 : Oscillation amortie par un frottement sec. La décroissance de l'amplitude est linéaire.

1.10.2.2. AMORTISSEMENT FLUIDE (OU VISQUEUX)

Dans un système mécanique, les frottements secs peuvent être pratiquement supprimées par lubrification adéquate. Il subsiste alors un amortissement par frottement fluide qui ne peut pas être négligé. En l'absence de lubrification par un apport de substance liquide, le frottement entraîne l'arrachement d'une mince couche de matière, qui crée les conditions du frottement fluide. Il est donc raisonnable pour les oscillateurs mécaniques avec frottements d'introduire le terme correspondant dans le bilan des forces. L'amortissement fluide ou visqueux se manifeste par une force proportionnelle à la vitesse, de coefficient h [N.s.m⁻¹] :

(1.104) $\vec{F}_f = -h \vec{v}$. Le signe (-) indique que la force est opposée à la vitesse (et donc la direction du mouvement).

Dans les systèmes électriques on trouve le phénomène équivalent avec l'apparition d'un courant de Foucault lorsqu'un conducteur se déplace dans un champ magnétique. L'équivalent électrique du frottement visqueux et la loi d'Ohm $U_R = R \frac{dq}{dt} = R i$.

1.10.2.3. AMORTISSEMENT STRUCTURAL (OU HYSTÉRIQUE)

Tout composant élastique (ressort, tôle, panneau, ...) dissipe de l'énergie lorsqu'il est soumis à une vibration. Dans un domaine limité de fréquence, le matériau peut être caractérisé par un coefficient appelé **facteur de perte** noté d . On traite le problème comme s'il y avait un amortissement visqueux en parallèle avec l'élément considéré. On définit un coefficient de frottement structural h_{struct} qui dépend de la pulsation d'oscillation. Il existe en général un intervalle de fréquence $[\omega_{min}, \omega_{max}]$ dans lequel h_{struct} peut être mis sous la forme suivante :

$$(1.105) \quad h_{struct} = \frac{K d}{\omega} .$$

1.10.2.4. FROTTEMENT DE NEWTON

Dans les milieux de forte viscosité, la force de frottement est proportionnelle au carré de la vitesse. L'équation différentielle résultante :

$$(1.106) \quad m \frac{d^2s}{dt^2} + h_2 \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + k s = 0$$

n'est plus linéaire ; il n'y a pas de solution analytique.

1.10.3. UN EXEMPLE D'APPLICATION DE MOUVEMENT VIBRATOIRE : LA MESURE DU TEMPS.

On mesure le temps à l'aide d'oscillateurs dont la période constitue l'étalon de durée dont on compte les répétitions. Le premier étalon a été le jour solaire divisé en 86 400 secondes. On s'en sert pour définir une échelle temporelle de référence, le temps universel (TU). Les deux problèmes suivants apparaissent cependant.

- Une rotation de la terre ne correspond pas à un nombre entier de jours ; des corrections sont nécessaires, ce sont les années bissextiles.

- La vitesse de rotation de la terre n'est pas constante. Sur une longue période, la durée d'une journée diminue à raison de 1 microseconde par siècle. A l'échelle humaine, la précision de l'horloge solaire est suffisante. Pour mesurer de façon précise les phénomènes atomiques et moléculaires, une précision plus grande est nécessaire.

Dès 1930 est apparue l'**horloge à quartz** qui présente l'inconvénient d'une fréquence, et donc d'une indication qui varie lentement avec le vieillissement du cristal.

Pour les mesures précises l'**horloge atomique** s'impose ; elle est basée sur la vibration de la molécule de césium. Une nouvelle définition de l'unité de temps est devenue possible en 1967. La **seconde atomique** est définie comme la durée de 9 192 631 770 périodes de la radiation électromagnétique émise par l'atome de césium 133. Cette fréquence atomique a été choisie pour que seconde solaire et seconde atomique coïncident. Plusieurs horloges atomiques fonctionnent dans le monde. La moyenne de leurs lectures constitue le **temps atomique**.

1.10.4. LES OSCILLATIONS DU CORPS HUMAIN

Le corps humain est source et objet de vibrations. On pense naturellement au cœur. Les sollicitations extérieures peuvent à certaines fréquences induire des vibrations de certaines parties du corps qui peuvent alors entrer en résonance et produire des effets pathologiques néfastes. En modélisant de façon simple on peut identifier quelques fréquences qui peuvent poser problème

Partie du corps	Fréquences gênantes (Hz)
Thorax	3 à 7
Cœur	4 à 8
Bassin	4 à 9
Tête	20 à 30
Globes oculaires	60 à 90

Extrait de Ondes et vibrations. Maxime Nicolas, Dunod, 2009, p 33