

3.3 – Le faisceau LASER et ses propriétés spatiales.

3.3 - 1 – LA CAVITÉ ET SA STABILITÉ.

La génération d'un faisceau laser directif et intense est possible si le rayonnement émis par le matériau est confiné dans une direction particulière par une cavité à la géométrie bien choisie. Une telle cavité est constituée au minimum de deux miroirs courbes bien alignés sur un axe commun. L'analyse des propriétés de ce dispositif peut être faite en première approximation en utilisant le modèle de l'optique géométrique.

En optique géométrique, on la propagation de la lumière est donnée par le cheminement des **rayons lumineux**, dont il suffit de connaître la direction en tout point ; pour la propagation dans un système centré sur un axe, on donne dans les différents plans, la distance par rapport à cet axe, ainsi que son inclinaison. Si on essaie de faire le lien avec l'onde, c'est comme si on ne considérait que des ondes planes (front d'onde plan, étendue transverse beaucoup plus grande que la longueur d'onde) sans se préoccuper de l'étendue transverse nécessairement limitée. Le rayon indique la direction de propagation de l'onde. Pour décrire une onde à étendue transverse limitée et peu divergente, le concept de rayon (le 'rayon laser') peut suffire ; dans ce cas le rayon dessiné correspond au rayon central qui est aussi l'axe du faisceau.

En utilisant le formalisme de l'**optique matricielle** il est possible de trouver les conditions de stabilité d'une cavité de laser. La stabilité d'une cavité est définie de la façon suivante.

Une **cavité** est dite **stable** s'il existe une famille de rayons qui, par réflexions sur les miroirs, restent indéfiniment à l'intérieur de la cavité. Si, exception faite du rayon axial, de tels rayons n'existent pas pour la cavité considérée, celle-ci est dite instable.

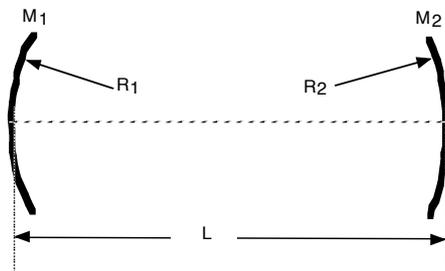


Fig. 3.3 - 1 : Cavité formée par deux miroirs sphériques de rayons de courbure R_1 et R_2 , séparés par une distance L .

On parle également de cavité résonnante (ou résonateur); ce terme est justifié par des considérations sur le spectre du rayonnement pouvant osciller dans la cavité.

3.3 - 2 – CONDITION DE STABILITÉ DE LA CAVITÉ.

3.3.2.1 - LE FORMALISME DE L'OPTIQUE MATRICIELLE.

Dans le formalisme de l'optique matricielle, tout système optique est représenté par une matrice à 4 éléments dont la connaissance permet de trouver la position et l'inclinaison d'un rayon en sortie du système si on connaît ces mêmes paramètres du rayon à l'entrée.

Un rayon dans un système est caractérisé par

- sa position (distance par rapport à l'axe du système)
- son orientation (inclinaison par rapport à l'axe du système).

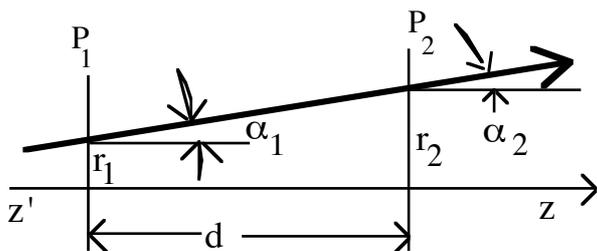


Fig. 3.3 - 2 : Paramètres de l'optique matricielle.

Le rayon indiqué sur la figure est caractérisé dans un plan perpendiculaire à l'axe z'z, par sa distance r à partir de l'axe considéré et par son inclinaison α par rapport à ce même axe.

3.3.2.2 - MATRICE [A, B, C, D] D'UN COMPOSANT OPTIQUE.

Étendue d'espace libre de longueur d

Sur la figure 2, considérons les deux plans perpendiculaires à l'axe Oz dans lesquels le rayon est défini par (r_1, α_1) et (r_2, α_2) . Ici et dans la suite, nous considérons des rayons très peu inclinés par rapport à l'axe (conditions de Gauss), ce qui nous permet d'écrire

$$\sin(\alpha) \approx \tan(\alpha) \approx \alpha = \frac{\Delta r}{\Delta z} \approx \frac{dr}{dz} .$$

Nous pouvons alors écrire (en utilisant la notation $r' = dr/dz$)

$$r_2 = 1 \cdot r_1 + d \cdot r'_1 \quad \text{et} \quad r'_2 = 0 \cdot r_1 + 1 \cdot r'_1 .$$

Le passage du rayon du plan P1 au plan P2 peut donc s'écrire :

$$(3.4.1) \quad \begin{bmatrix} r_2 \\ r'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r'_1 \end{bmatrix}$$

La matrice $\begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ caractérise un élément d'espace libre de longueur d.

Élément optique quelconque

Un système optique quelconque est caractérisé par une matrice $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ telle que :

$$(3.4.2) \quad \begin{bmatrix} r_2 \\ r'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r'_1 \end{bmatrix}$$

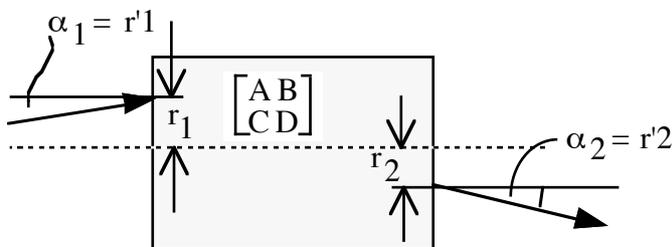


Fig. 3.3 - 3 : Les paramètres r et α d'un rayon paraxial à la sortie d'un système optique peuvent être calculés si les paramètres r et α sont connus à l'entrée, ainsi que les éléments A, B, C, D de matrice caractérisant le système.

Le problème de l'indice de réfraction.

On montre que, dans le cas où les milieux à l'entrée et à la sortie du système ont même indice, la relation suivante est vérifiée :

(3.4.3) $AD - BC = 1.$

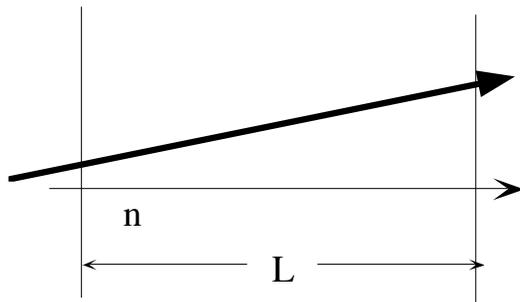
Afin de lever l'ambiguïté concernant l'indice, il convient d'introduire la notion de pente réduite en z définie par

(3.4.4) $r'(z) = \alpha \approx n(z) \frac{\Delta r}{\Delta z}$

Si cette précaution n'est pas prise, la relation (2.3) ci-dessus s'écrit

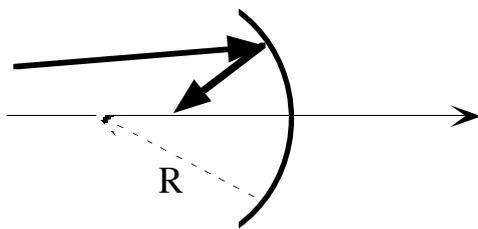
$AD - BC = n_1/n_2$ où n_1 est l'indice du milieu d'entrée et n_2 l'indice du milieu de sortie.

Fig. 3.3 - 4 : Représentation matricielle de quelques éléments courants des systèmes optiques [1].



a) Élément d'espace libre

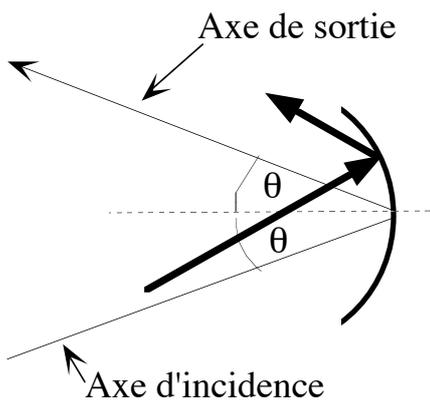
$$\begin{bmatrix} 1 & L/n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



b) Miroir sphérique de rayon R

(le centre de courbure est sur l'axe optique)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{bmatrix}$$



c) Miroir sphérique de rayon R

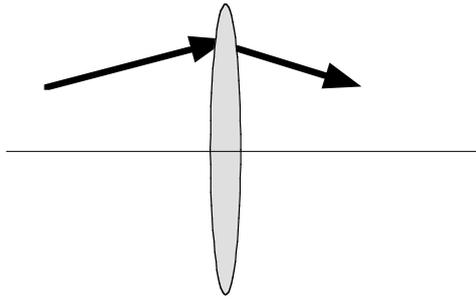
(le centre de courbure est en dehors de l'axe optique)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R_e} & 1 \end{bmatrix}$$

avec $R_e = R \cos \theta$ pour le plan tangentiel (ou plan d'incidence)

et $R_e = R / \cos \theta$ pour le plan sagittal (perpendiculaire au plan d'incidence)

¹ "Lasers"; A. Siegman, University Science Books, Mill Valley, California, 1986.



d - Lentille mince de distance focale f

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{bmatrix}$$

3.3.2.3 - PROPAGATION À TRAVERS UNE SÉRIE D'ÉLÉMENTS EN SÉRIE.

Considérons une série d'éléments de matrices M_1, M_2, \dots, M_n , alignés par rapport à un axe. Le paramètre r_0 d'un rayon incident devient après le premier élément :

$$r_1 = M_1 r_0$$

puis après le deuxième élément : $r_2 = M_2 r_1$. A la fin de la série d'éléments, le rayon est situé à une distance r_n de l'axe donnée par :

$$r_n = M_n \dots M_2 M_1 r_0.$$

La série d'éléments est donc équivalente à un élément de matrice $M = M_n \dots M_2 M_1$.

Remarque 1 : On peut montrer que le déterminant de la matrice est égal

- à 1 si le milieu de sortie est identique au milieu d'entrée,
- à $AD - BC = n_1/n_2$ si les deux milieux ne sont pas identiques, $n_{1,2}$ étant les indices de ces milieux.

Remarque : La notation matricielle utilisée ici pour calculer des composants optiques est analogue à celle utilisée pour les réseaux électriques.

3.3.2.4 - OPTIQUE MATRICIELLE ET PROPAGATION D'ONDE SPHÉRIQUE. LOI ABCD

Le formalisme de l'optique matricielle peut être généralisé à la propagation d'ondes sphériques dans les limites des aberrations du 1er ordre. Pour le constater, considérons une onde sphérique divergente représentée par une famille de rayons issus d'un point source (figure ci-après).

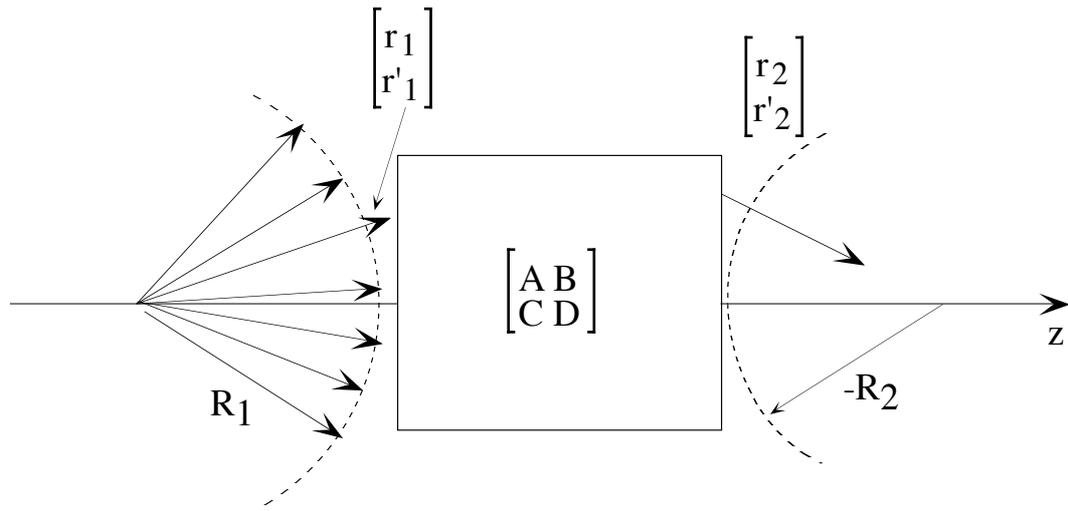


Fig. 3.3 - 5 : Transformation d'une onde sphérique par un système optique.

L'inclinaison et le déplacement d'un rayon, dans un plan où le rayon de courbure est $R(z)$ sont liés par la relation :

$$(3.4.5) \quad r'(z) = n(z) \frac{dr(z)}{dz} = \frac{n(z) r(z)}{R(z)}$$

Le rayon de courbure est donc donné par : $R(z) = \frac{n(z) r(z)}{r'(z)}$. Le rayon est positif pour une onde divergente, et négatif pour une onde convergente. Si on considère une onde divergente incidente de rayon de courbure R_1 , sur un système de matrice $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ l'onde émergente aura un rayon de courbure R_2 tel que :

$$(3.4.6) \quad \frac{R_2}{n_2} \equiv \frac{r_2}{r'_2} = \frac{Ar_1 + Br'_1}{Cr_1 + Dr'_1} = \frac{A\left(\frac{R_1}{n_1}\right) + B}{C\left(\frac{R_1}{n_1}\right) + D}.$$

En utilisant la notion de 'rayon de courbure réduit' $\hat{R}(z) \equiv \frac{R(z)}{n}$ pour tenir compte des indices différents à l'entrée et en sortie, on obtient la relation

$$(3.4.7) \quad R_2 = \frac{A\hat{R}_1 + B}{C\hat{R}_1 + D}$$

qui sera très utile dans la description de la propagation des faisceaux issus de cavités laser.

3.3.2.5 - REPRÉSENTATION MATRICIELLE D'UNE CAVITÉ LASER.

Une cavité de laser, dans le cas le plus simple, est constituée de 2 miroirs de forme sphérique. Du point de vue de l'optique matricielle, la cavité est constituée d'un élément d'espace libre et de deux surfaces réfléchissantes. La matrice de l'élément d'espace libre a été donnée ci-dessus. Pour les surfaces réfléchissantes il suffit de considérer l'analogie entre une lentille mince et un miroir sphérique.

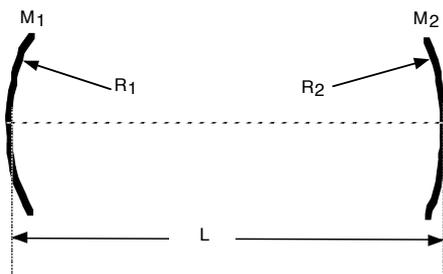
On peut montrer que pour une lentille mince on peut écrire :

$$(3.4.8) \quad \begin{bmatrix} r_2 \\ r'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r'_1 \end{bmatrix}$$

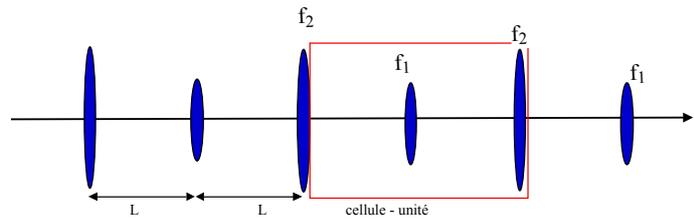
Un miroir sphérique se comporte comme une lentille de focale $f = \frac{R}{2}$. La matrice T du miroir des donc égale à :

$$(3.4.9) \quad T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{bmatrix}$$

Calculons les éléments matriciels de la cavité ci - après.



(a) cavité constituée de 2 miroirs concaves



(b) - Guide d'ondes à lentilles équivalent à une cavité constituée de 2 miroirs sphériques

Cette cavité agit sur les rayons comme le ferait un guide à lentilles (b). Pour trouver la matrice $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ correspondant à un aller-retour dans la cavité ou une cellule unité du guide, on fait le produit des matrices des différents éléments traversés par un rayon : 1 élément d'espace libre de longueur L, la lentille de focale f_2 , à nouveau l'élément d'espace libre, enfin la lentille de focale f_1 . On obtient :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_2} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_1} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & L \\ -\frac{1}{f_2} & 1 - \frac{L}{f_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & L \\ -\frac{1}{f_1} & 1 - \frac{L}{f_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{L}{f_1} & L + L \left(1 - \frac{L}{f_1}\right) \\ -\frac{1}{f_2} - \frac{1}{f_1} \left(1 - \frac{1}{f_2}\right) & \left(1 - \frac{1}{f_2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{f_1}\right) - \frac{L}{f_2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Nous avons donc :

$$(3.4.10) \quad A = 1 - \frac{L}{f_1} ; \quad B = 2L - \frac{L^2}{f_1}$$

$$C = -\frac{1}{f_2} - \frac{1}{f_1} \left(1 - \frac{1}{f_2}\right) ; \quad D = -\frac{L}{f_2} + \left(1 - \frac{L}{f_1}\right) \left(1 - \frac{L}{f_2}\right)$$

f_1 et f_2 sont les distances focales des miroirs de la cavité ($f_{1,2} = R_{1,2} / 2$).

Nous pouvons revenir à la cavité en remplaçant les distances focales des lentilles par celles des

miroirs, ce qui donne :

$$(3.4.11) \quad A = 1 - \frac{2L}{R_1} ; \quad B = 2L - \frac{2L^2}{R_1}$$

$$C = -\frac{2}{R_2} - \frac{2}{R_1} \left(1 - \frac{2}{R_2} \right) ; \quad D = -\frac{2L}{R_2} + \left(1 - \frac{2L}{R_1} \right) \left(1 - \frac{2L}{R_2} \right)$$

Remarque : Un choix différent pour la cellule unité aurait donné des coefficients différents, sans conséquence sur la conclusion faite plus loin sur la stabilité.

3.3.2.6 - CONDITIONS DE STABILITÉ D'UNE CAVITÉ LASER.

Afin de déterminer les conditions que devra remplir une cavité stable, utilisons le dispositif équivalent sous la forme d'un guide à lentille. (figure ci-après).

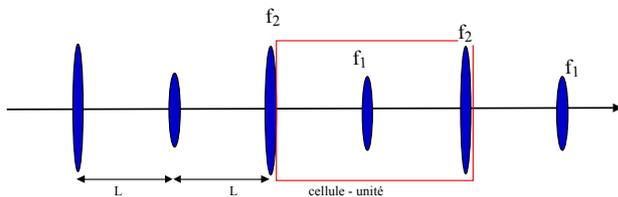


Fig. 3.3 - 6 : Guide à lentille.

Le guide à lentille est constituée d'une série infinie de cellules élémentaires correspondant chacune Nous allons établir la condition de stabilité en cherchant la condition pour laquelle un rayon entrant dans le guide ne s'éloigne pas indéfiniment de l'axe, mais revient de façon périodique vers cet axe. Utilisons la lettre s pour indexer les cellules.

La position r_{s+1} d'un rayon à l'entrée de la cellule s+1 est reliée aux paramètres r_s et r'_s du même rayon à l'entrée de la cellule s par :

$$r_{s+1} = A r_s + B r'_s.$$

On a donc l'expression suivante pour r'_s :

$$r'_s = \frac{1}{B} (r_{s+1} - A r_s)$$

Par analogie :

$$r'_{s+1} = \frac{1}{B} (r_{s+2} - A r_{s+1}) = C r_s + D r'_s = C r_s + \frac{D}{B} (r_{s+1} - A r_s).$$

En tenant compte de la relation ci-dessus et de la relation $AD - BC = 1$, on obtient une relation entre les positions du rayon dans 3 cellules successives :

$$(3.4.12) \quad r_{s+2} - 2 \left(\frac{A + D}{2} \right) r_{s+1} + r_s = 0.$$

A cet endroit on peut se demander ce que peut faire un rayon lors de son cheminement dans le guide. A quelle condition peut-il y rester indéfiniment ? Une façon de répondre à cette question, c'est de dire qu'un rayon guidé est tel que sa distance r à l'axe du guide reste toujours inférieure à une distance r_{\max} , et ceci quel que soit le nombre de cellules traversées. On ne change rien à la généralité du problème en ne considérant que les positions du rayon à l'entrée des cellules. De toute façon, dans la description matricielle, nous ne savons rien des positions du rayon à l'intérieur de la cellule. Cherchons donc des solutions pour les positions r_s . La figure ci-après indique deux possibilités : le cas

noté 1 correspond à un rayon guidé, le cas noté 2 correspond à un rayon non guidé (r augmente de façon exponentielle).

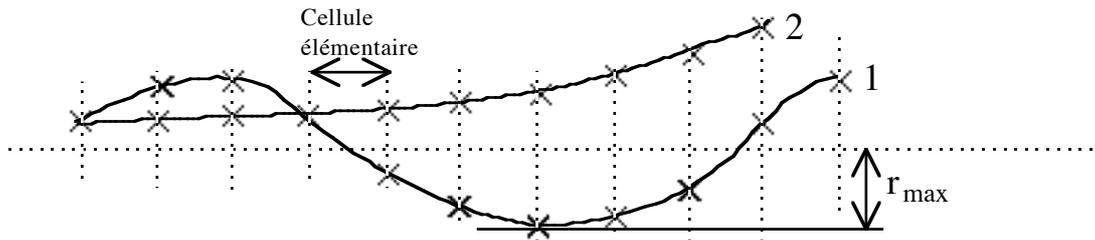


Fig. 3.3 - 7 : Lieu des positions successives pour un rayon se propageant dans un guide stable (1), instable (2).

Les solutions représentées sur la figure ci-dessus pour le lieu des points d'entrée du rayon considéré dans les cellules successives sont de la forme :

$$r_s = r_0 (\exp j\theta)^s = r_0 \exp (js\theta)$$

En introduisant cette solution dans l'équation (2.7), on obtient :

$$r_0 \exp (js\theta) \left[\exp(j2\theta) - 2 \frac{A+D}{2} \exp(js\theta) + 1 \right] = 0 .$$

r_0 pouvant être égal à 0 dans le cas général, on peut donc écrire que l'expression entre parenthèses carrées s'annule. On trouve alors la solution suivante pour $\exp (j\theta)$:

$$(3.4.13) \quad \exp (j\theta) = \frac{A+D}{2} \pm j \sqrt{1 - \left(\frac{A+D}{2} \right)^2} .$$

En se souvenant que r_s doit être un nombre réel, on obtient une solution générale :

$$(3.4.14) \quad r_s = r_0 \exp (js\theta) + r_0^* \exp (-js\theta) \quad \text{ou} \quad r_s = r_{\max} \sin (s\theta + \alpha)$$

α et r_{\max} étant des constantes à définir.

Diagramme de stabilité.

Les paramètres r et θ sont réels à condition que

$$-1 \leq \frac{A+D}{2} \leq +1 \quad \text{ou (en ajoutant 1 et en divisant par 2) :}$$

$$(3.4.15) \quad 0 \leq \frac{A+D+2}{4} \leq 1 .$$

$$\text{On a } \frac{A+D+2}{4} = \frac{1}{4} \left[1 - \frac{L}{f_2} - \frac{L}{f_1} + \left(1 - \frac{L}{f_2} \right) \left(1 - \frac{L}{f_1} \right) + 2 \right]$$

$$= \left(1 - \frac{L}{2f_1} \right) \left(1 - \frac{L}{2f_2} \right) = \left(1 - \frac{L}{R_1} \right) \left(1 - \frac{L}{R_2} \right)$$

Si on introduit les coefficients g suivants :

$$(3.4.16) \quad g_{1,2} = 1 - \frac{L}{R_{1,2}}$$

la condition de stabilité devient :

$$(3.4.17) \quad 0 \leq g_1 g_2 \leq 1$$

En pratique, une bonne stabilité mécanique est obtenue en respectant la condition : $R_i \leq 5 L$.

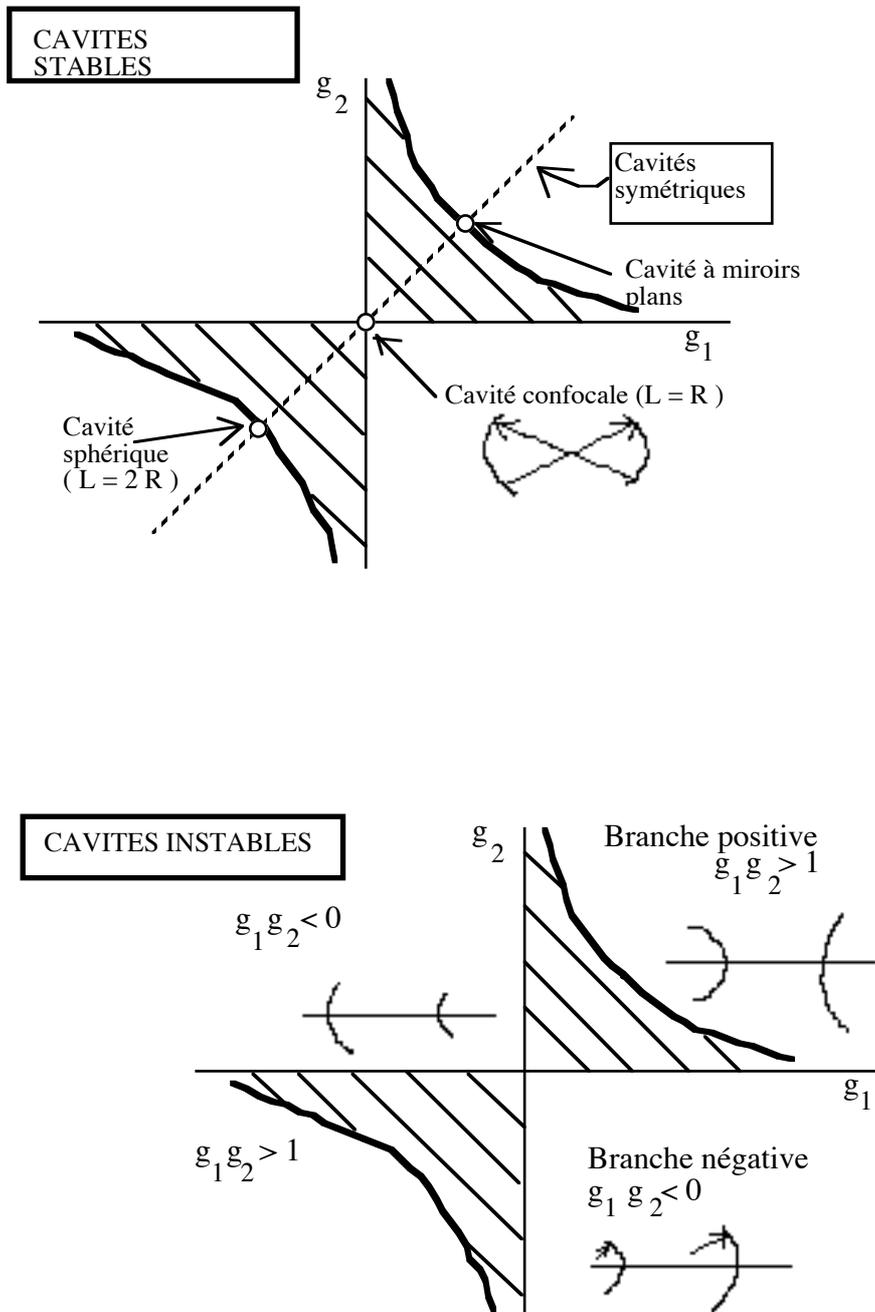


Fig. 3.3 - 8 : Diagramme de stabilité de cavités formées de 2 miroirs sphériques.

Notons encore que le formalisme matriciel avec la représentation d'une cavité résonante par une matrice [ABCD] permet également de décrire la propagation des faisceaux laser en dehors de la cavité. Voir par exemple ["Beam propagation and the ABCD ray matrices", P.A. Bélanger, Opt. Lett., Vol. 16, N° 4, Feb. 15, (1991)]

3.3.2.7 - STABILITÉ DE CAVITÉ. INFLUENCE DES CONDITIONS INITIALES.

Soit une cavité dont on connaît les éléments matriciels. Cette cavité peut être assimilée au guide d'onde suivant dans lequel on a fait apparaître quelques cellules élémentaires.

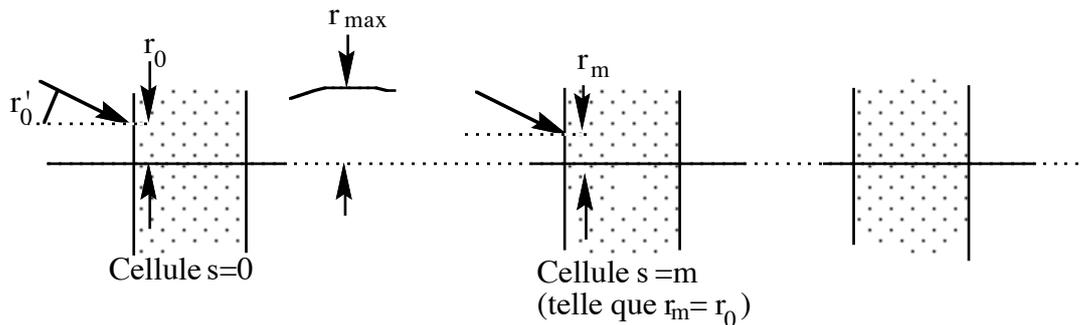


Fig. 3.3 - 9 : Guide d'onde constitué de cellules élémentaires, chaque cellule correspondant à un aller-retour dans une cavité.

Nous avons vu que d'une cellule à l'autre dans le guide équivalent à la cavité, la position r_s d'un rayon varie suivant l'expression:

$$(3.4.18) \quad r_s = r_{max} \sin(s\theta + \alpha) .$$

$$\text{avec } \theta = \arccos\left(\frac{A + D}{2}\right) .$$

Considérons un rayon défini par sa position r_0 et son inclinaison r'_0 à l'entrée. On peut poser les deux questions suivantes concernant ce rayon :

1 - Combien d'aller-retour dans la cavité sont nécessaires pour que le rayon retrouve sa position de départ ?

2 - Comment dépend la position extrême r_{max} du rayon des conditions initiales ?

Pour répondre à la première question, il suffit de considérer une cellule m telle que, à l'entrée de cette cellule, $r_m = r_0$. Le nombre m est obtenu par les relations suivantes :

$$m\theta = n \cdot 2\pi \quad \text{et} \quad n < m/2 .$$

Pour répondre à la 2ème question, écrivons la relation (2-14) ci-dessus pour la 1ère cellule ($s = 0$) ainsi que pour la 2ème cellule unitaire ($s=1$). On en déduit α et r_{max} :

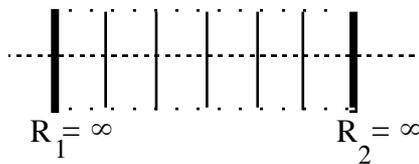
$$(3.4.19) \quad \alpha = \text{arctg} \left[\frac{r_0 \sqrt{1 - \left(\frac{A + D}{2}\right)^2}}{r_0 \left(\frac{A - D}{2}\right) + B r'_0} \right]$$

$$(3.4.20) \quad r_{\max} = \frac{r_0}{\sin(\alpha)}$$

Pour savoir si les conditions initiales que nous avons considérées sont acceptables, il faut comparer la valeur trouvée pour r_{\max} et les dimensions transverses des composants de la cavité.

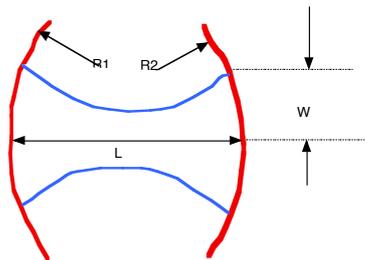
3.3.2.8 QUELQUES EXEMPLES DE CAVITÉS STABLES.

Sur les exemples de cavités de cavités (Fig. 10) présentées ci-après, nous faisons apparaître l'enveloppe des rayons correspondant au faisceau qui oscille dans la cavité. Cette enveloppe limite un volume à symétrie cylindrique qui présente une section minimale de rayon W_0 qui s'exprime en fonction des paramètres de la cavité. La description des modes du champ dans la cavité permet de faire le calcul de W_0 .



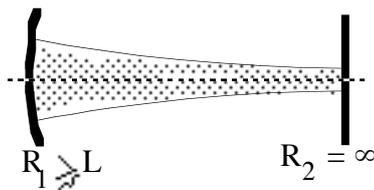
a) Cavité à miroirs plans.

- ☐ - Stabilité marginale;
- ☐ - Bon taux de remplissage;
- ☐ - Alignement délicat;
- ☐ - Pertes par diffraction;
- ☐ - peut être utilisée pour les lasers à solide, dans lesquels la lentille thermique que constitue le matériau actif chauffé, joue un rôle dans la géométrie de la cavité.



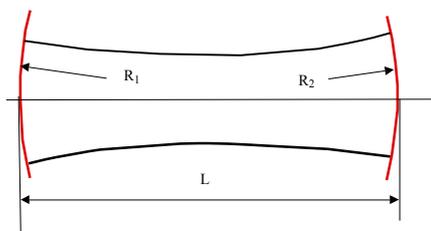
b) Cavité symétrique confocale.

- ☐ - Faible diamètre du faisceau sur les miroirs;
- ☐ - Faibles pertes par diffraction;
- ☐ - Taux de remplissage médiocre;
- W est le rayon du faisceau.



c) Cavité hémisphérique.

- ☐ - Alignement facile;
- ☐ - Ne convient pas pour les lasers de puissance car le faisceau présente un maximum d'intensité sur les miroirs.



d) Cavité à grands rayons de courbure.

- ☐ - Bonne stabilité;
- ☐ - Bon compromis entre le taux de remplissage et la stabilité;
- ☐ - Souvent utilisé pour les lasers commerciaux de faible et moyenne puissance.

Fig. 3.3 - 10 : Exemples de cavités laser

3.3.2.9 INFLUENCE DU MILIEU ACTIF SUR LA STABILITÉ DE LA CAVITÉ

La description de la stabilité d'une cavité a été faite ci-dessus en supposant que le milieu ne perturbait pas la propagation de l'onde. C'est effectivement le cas dans les lasers à gaz dont l'indice de réfraction varie peu lorsque le laser est en fonctionnement. Dans le cas des lasers solides, la situation est différente. L'énergie injectée dans le milieu pour l'exciter, sert en grande partie à chauffer celui-ci. L'élévation de température s'accompagne d'une variation d'indice, qui n'est en général pas uniforme. Tout se passe comme si le pompage s'accompagnait de l'introduction d'une lentille à l'intérieur de la cavité. Les conditions de stabilité ne sont donc pas les mêmes 'à froid' et 'à chaud'. Ce problème dit de la 'lentille thermique' est très difficile à maîtriser si on reste dans une configuration où le milieu actif se présente sous la forme d'un barreau cylindrique. De nouveaux types de laser ont contribué à lever la difficulté, ce sont les lasers à fibre et les lasers à disque.

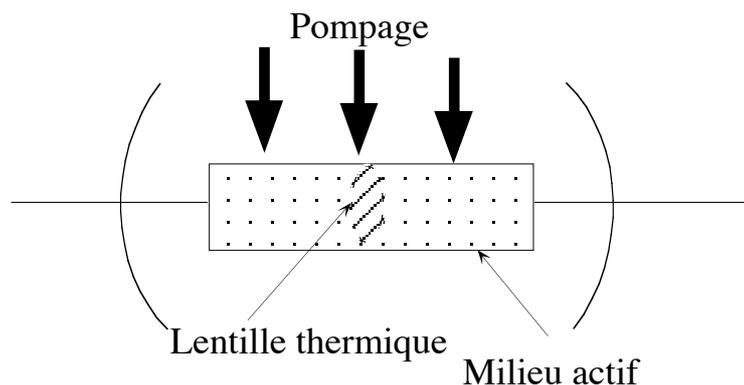


Fig. 3.3 - 11 : Lentille thermique dans les lasers solides.

Le pompage entraîne un échauffement, et une variation de l'indice. Le barreau peut se comporter comme une lentille de focale variable, qui change les conditions de stabilité de la cavité.

3.3.2.10 - CAVITÉS INSTABLES.

Une cavité dont les éléments matriciels vérifient la relation $\frac{A + D}{2} > 1$ est instable. Les cavités instables présentent un intérêt pratique pour les milieux actifs qui offrent un coefficient d'amplification important (CO₂, vapeurs métalliques). Dans ce cas, les deux miroirs de la cavité sont totalement réfléchissants; la partie utile du rayonnement est constituée par les rayons qui quittent la cavité, soit par une ouverture pratiquée dans l'un des miroirs, soit autour de l'un des miroirs (figure).

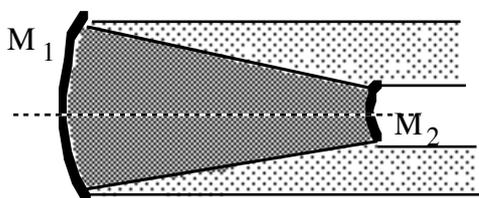


Fig. 3.3 - 12 : Exemple de cavité instable : cavité confocale

- - Le milieu doit offrir un gain important (CO₂, Vapeur métallique);
- - Le faisceau occupe la totalité du volume compris entre les deux miroirs;

3.3.2.11 LA CAVITÉ DU LASER À DISQUE

Une solution afin de diminuer l'effet de lentille thermique dans la cavité, consiste à utiliser, à la place d'un barreau de longueur importante (10 à 15 cm), un disque mince dans lequel la chaleur peut être évacuée rapidement. La source utilisée pour le pompage est constituée de diodes lasers. Le système optique de pompage doit permettre un bon couplage de l'énergie de pompage dans le disque mince. Un exemple de configuration est présenté ci-après. La cavité du laser reste proche du schéma

de base avec deux miroirs. La particularité est que le matériau actif repose directement sur la surface réfléchissante du miroir arrière.

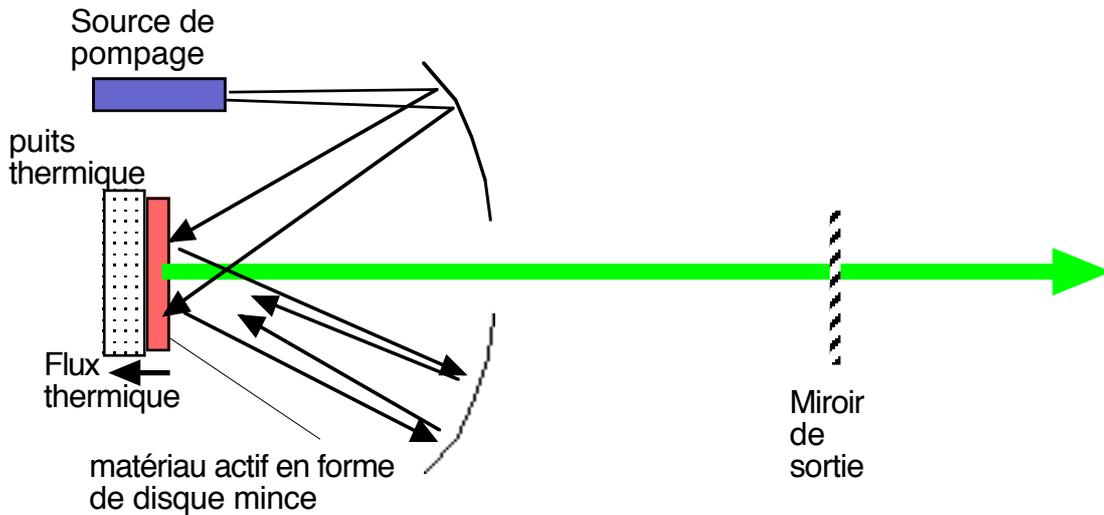


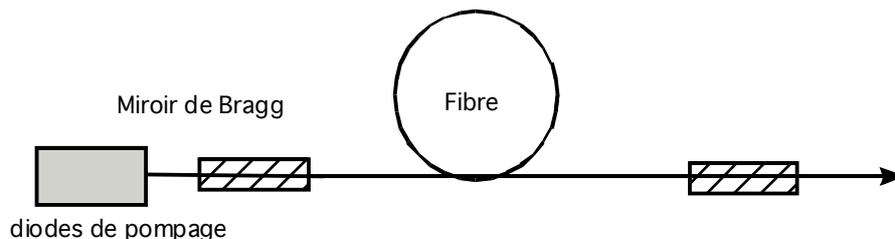
Fig. 3.3 - 13 : Laser à disque. Principe de la cavité. La chaleur est évacuée par diffusion vers le substrat qui sert de puits thermique. Il n’y a pas de gradient latéral de température, et donc d’indice.

3.3.2.12 LA CAVITÉ DU LASER À FIBRE

Une autre façon d’éliminer le problème de la lentille thermique est d’utiliser une structure cylindrique, de petit diamètre et de grande longueur. La lumière émise est alors guidée le long de la structure, ce qui explique qu’on désigne ces lasers sous le nom de laser à fibre. Il devient alors difficile d’injecter le faisceau de pompage dans la fibre active, même si s’il s’agit de lasers à diode. La solution, pour obtenir un pompage efficace, consiste à entourer la fibre active d’une autre guide. Les lasers à fibre permettent d’obtenir des faisceaux de très bonne ‘qualité’ (notion définie dans le chapitre sur les modes spatiaux).

Dans un laser à fibre le faisceau est confiné latéralement par les réflexions à l’interface cœur-gaine de la fibre, contrairement à un laser standard où cette contrainte n’existe pas. Le cœur ayant un diamètre de quelques dizaines de microns, le faisceau sort avec une divergence importante qu’il convient de corriger avec un composant optique complémentaire.

La cavité est particulière. Les miroirs peuvent être externes à la fibre, mais il est possible également de les intégrer à la fibre sous la forme d’une modulation périodique d’indice du cœur (miroirs de Bragg). La stabilité mécanique du dispositif est alors nettement améliorée puisqu’il n’y a plus de désalignement possible.



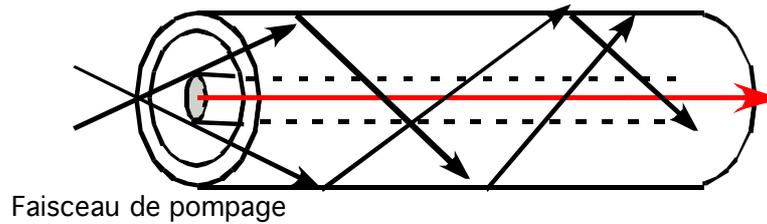


Fig. 3.3 - 14 : Laser à fibre. Principe.

3.3 - 3 – FORMATION DES MODES DANS UNE CAVITÉ : ONDES TEM

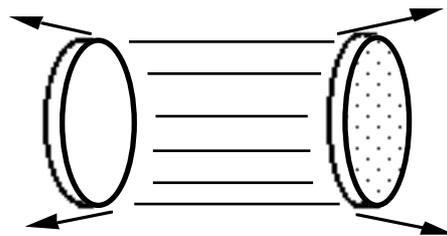
3.3.3.1 ONDE ÉM ET DIFFRACTION

Pour trouver les conditions de "stabilité" d'une cavité optique, nous avons utilisé le concept de **rayon**. Une description complète du faisceau laser nous impose d'utiliser la notion de **champ**. Nous allons donc chercher à décrire aussi précisément que possible, la distribution du champ électrique dans le faisceau que peut générer un laser.

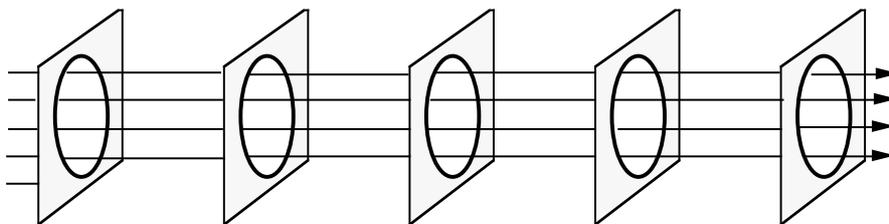
Les cavités laser sont en général ouvertes sur les côtés contrairement aux cavités micro-ondes, ce qui entraîne des pertes par diffraction. Certaines cavités ont la propriété de guider la lumière émise par un renvoi des parois latérales, ce sont les lasers à fibre. Suivant l'importance des effets de diffraction dans la cavité, nous observons des faisceaux à profil plus ou moins complexe.

On observe que les cavités stables définies précédemment ont tendance à générer des faisceaux de faible étendue transverse. La simple considération des contraintes auxquelles une onde contenue entre les deux miroirs de la cavité est soumise permet de comprendre l'allure du faisceau observé.

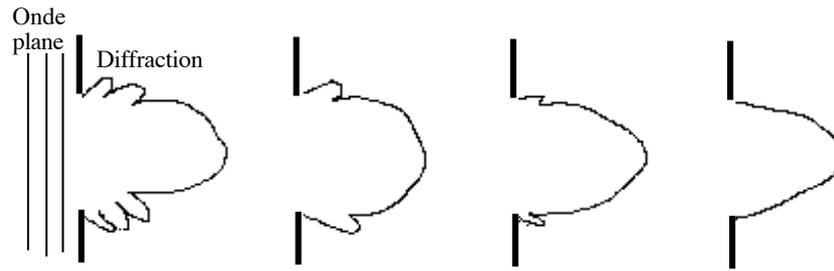
Pour comprendre la mise en forme spatiale du faisceau par la cavité, on peut utiliser l'analogie du guide d'onde (Fig. 3.15.b) : la propagation de l'onde dans la cavité est analogue à la propagation le long d'un ensemble de diaphragmes alignés. Si on introduit une onde plane dans un tel guide, l'onde aura au bout d'un certain nombre d'ouvertures l'allure d'un faisceau émis par une cavité laser (figure 3.15.c).



a - Une onde qui prend naissance dans l'espace compris entre les deux miroirs de la cavité subit des pertes par diffraction sur les bords des miroirs.



b - Une cavité constituée de deux miroirs peut être comparée à un guide formé par une succession d'ouvertures circulaires.



c - La diffraction sur les bords des ouvertures lisse progressivement les bords du faisceau. Après un grand nombre d'ouvertures, on observe un faisceau peu divergent, avec une distribution d'intensité diminuant progressivement du milieu vers les bords.

Fig. 3.3 - 15 : Effets de la diffraction sur un faisceau lumineux

La question à laquelle il convient de répondre pour décrire le profil transverse du faisceau est celle-ci : existe-t-il des distributions de champ qui se reproduisent d'un aller-retour à l'autre dans une cavité optique ?

On montrera ci-après que de telles distributions existent; on les appelle les **modes transverses** de la cavité. On cherchera les modes transverses comme des *solutions de l'équation d'onde dans l'espace libre pour le cas particulier où l'étendue transverse de l'onde est limitée*. Il suffira ensuite, pour une onde donnée de trouver les cavités qui ne modifient pas les propriétés de l'onde. Nous aurons ainsi trouvé les modes transverses des cavités stables. Pour les cavités instables, l'analyse est plus délicate et les faisceaux générés, plus difficiles à décrire.

3.3.3.2 ONDE ÉM DANS L'ESPACE LIBRE.

Le développement fait ci-après est utilisé dans plusieurs ouvrages sur les lasers. Nous nous inspirons plus particulièrement de celui de Verdeyen².

Dans l'espace libre ($\rho = 0$), les ondes ém sont des ondes TEM. Une onde ém caractérisée par une distribution de champ électrique $\vec{E}(x, y, z)$, se propageant le long d'un axe z , vérifie la relation de Maxwell

$$(3.4.21) \quad \text{div} \vec{E}(x, y, z) = \vec{0}.$$

Séparons les composantes longitudinales (\vec{E}_z) et transverse (\vec{E}_t) du champ. La relation ci-dessus devient :

$$(3.4.22) \quad \text{div} \vec{E} = \text{div}_t \vec{E}_t + \frac{\partial}{\partial z} E_z = 0.$$

Nous considérons une onde se propageant essentiellement le long d'un axe Oz et dont l'étendue transverse est faible. La variation du champ le long de la direction de propagation, l'axe z ' z se fait essentiellement sous la forme e^{-jkz} avec $k = \frac{2\pi}{\lambda}$. On a donc

$$(3.4.23) \quad \frac{\partial E_z}{\partial z} \approx -jk E_z \approx -j \frac{2\pi}{\lambda} E_z.$$

Aux fréquences qui nous intéressent (10^{13} à 10^{15} Hz) k est très grand.

² "Laser electronics"; J. T. VERDEYEN, Prentice Hall, Inc, N. J., USA (1981); 2nd ed. (1989)

Par ailleurs, nous cherchons à décrire des ondes qui ont un diamètre D compris entre le millimètre et le centimètre. La divergence transverse est sensiblement égale à

$$(3.4.24) \quad \text{div } E_t \approx \frac{E_t}{D}, E_t \text{ étant la valeur maximale du champ transverse.}$$

Les 2 approximations ci-dessus introduites dans l'équation (3.2), permettent d'établir une relation entre les composantes transverses E_t et longitudinales E_z du champ :

$$(3.4.25) \quad \frac{2\pi}{\lambda} |E_z| \approx \frac{|E_t|}{D} \text{ ou } \left| \frac{E_z}{E_t} \right| \approx \frac{1}{2\pi} \frac{\lambda}{D} .$$

Les longueurs d'onde que nous considérons sont de l'ordre du micron et les dimensions transverses visées se situent autour du millimètre ou un peu plus. On a donc $\lambda \ll D$ et la composante longitudinale E_z est donc beaucoup plus petite que la composante transverse E_t .

Cherchons donc les solutions sous la forme d'ondes presque planes décrites par l'expression :

$$(3.4.26) \quad E(x,y,z) = E_0 \psi(x,y,z) \cdot e^{-jkz} .$$

Le terme $\psi(x,y,z)$ décrit l'écart de l'onde que nous cherchons par rapport à l'onde plane $E_0 \cdot e^{-jkz}$. Ce terme doit s'annuler à partir d'une certaine distance de l'axe dans le plan transverse ; il change lentement le long de l'axe z .

L'onde que nous cherchons est donc peu différente d'une onde TEM et l'approximation ci-dessus est justifiée.

Résolvons l'équation d'onde pour l'onde décrite par l'expression (3.3) en ne prenant en considération qu'une composante de polarisation (passage du vecteur \vec{E} à champ scalaire E).

$$(3.4.27) \quad \Delta E + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} E = 0 .$$

On obtient l'équation suivante pour le terme inconnu $\psi(x, y, z)$:

$$(3.4.28) \quad \Delta_t \psi - j 2k \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0 ,$$

où $\Delta_t = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ est le Laplacien scalaire suivant les coordonnées transverses.

k étant très grand aux fréquences qui nous intéressent, le terme en dérivée seconde peut donc être négligé devant le terme en dérivée première contenant le facteur k .

L'équation à résoudre, dite **équation parabolique paraxiale**, est donc la suivante :

$$(3.4.29) \quad \Delta_t \psi - j 2k \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0$$

Les situations qui nous intéressent correspondent le plus souvent à un repère cylindrique ; c'est le cas de la plupart des lasers. En coordonnées cylindriques (r, z) l'équation (3.8) devient :

$$(3.4.30) \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) - j 2k \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 .$$

Cette équation a pour solution l'onde plane ou l'onde sphérique. On vérifie cependant que ni l'une, ni l'autre de ces deux ondes ne décrit de façon satisfaisante le faisceau laser. Une forme qui convient

et qui est proposée ci-après, se justifie à posteriori (beaucoup d'intuition serait nécessaire pour deviner cette solution ...) :

$$(3.4.31) \quad \psi_0(r,z) = \exp \left\{ -j \left[P(z) + \frac{kr^2}{2q(z)} \right] \right\}.$$

L'indice 0 correspond à la solution dite fondamentale, ou mode fondamental de propagation d'un faisceau à étendue transverse limitée.

Les termes $P(z)$ et $q(z)$ que nous devons maintenant trouver seront justifiés plus loin ; pour l'instant nous faisons en sorte qu'ils vérifient l'équation.

On a besoin des éléments suivants :

$$-j 2k \frac{\partial \psi_0}{\partial z} = \left[-2kP'(z) + \frac{k^2 r^2 q'(z)}{q^2(z)} \right] \psi_0$$

$$\frac{\partial \psi_0}{\partial r} = -j \frac{kr}{q(z)} \psi_0 \Rightarrow r \frac{\partial \psi_0}{\partial r} = -j \frac{kr^2}{q(z)} \psi_0$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \right) = -j \frac{kr^2}{q(z)} \left[-j \frac{kr}{q(z)} \right] \psi_0 - j 2 \frac{kr}{q(z)} \psi_0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \right) = \left[-\frac{kr^2}{q^2(z)} - j \frac{2k}{q(z)} \right] \psi_0$$

En introduisant ces termes dans l'équation (3.9), on obtient

$$(3.4.32) \quad \left\{ \left[\frac{k^2}{q^2(z)} (q'(z) - 1) \right] r^2 - 2k \left[P'(z) + j \frac{1}{q(z)} \right] \right\} \psi_0 = 0.$$

La résolution de l'équation ci-dessus équivaut à la résolution des 2 équations suivantes :

$$(3.4.33) \quad q'(z) = \frac{dq(z)}{dz} = 1 \text{ et } P'(z) = \frac{dP(z)}{dz} = -j \frac{1}{q(z)}.$$

La solution pour $q(z)$ s'écrit :

$$(3.4.34) \quad q(z) = q_0 + z$$

q_0 étant la valeur particulière que prend la fonction $q(z)$ à $z = 0$. q_0 est un nombre complexe, car une valeur réelle pour q_0 signifierait que l'onde garde une amplitude constante et une phase variant de plus en plus rapidement pour r de plus en plus grand !

On prendra donc $q(z)$ sous la forme :

$$(3.4.35) \quad q(z) = j z_0 + z \text{ où } z_0 \text{ est réel.}$$

Pour $z=0$ la fonction ψ_0 est égale à :

$$(3.4.36) \quad \psi_0(z=0) = \exp \left(-\frac{kr^2}{2z_0} \right) \cdot \exp[-jP(z=0)].$$

Le terme $\exp \left(-\frac{kr^2}{2z_0} \right)$ décrit la variation d'amplitude de l'onde dans le plan $z=0$. En désignant par W_0 la distance par rapport à l'axe Oz pour laquelle l'amplitude a diminué d'un facteur e^{-1} , le terme

d'amplitude peut s'écrire $\exp\left(-\frac{r^2}{w_0^2}\right)$. W_0 est le rayon à e^{-1} de l'amplitude maximale de la section de l'onde à $z = 0$. z_0 est une constante caractérisant le faisceau :

$$(3.4.37) \quad z_0 = \frac{\pi W_0^2}{\lambda} .$$

Détaillons maintenant $q(z)$ qui apparaît dans la relation (3.10) . Écrivons $\frac{1}{q(z)}$ sous la forme :

$$(3.4.38) \quad \frac{1}{q(z)} = \frac{z}{z^2 + z_0^2} - j \frac{z_0}{z^2 + z_0^2} = \frac{1}{R(z)} - j \frac{\lambda}{\pi W^2(z)} .$$

Cette écriture qui se justifie à posteriori, nous permet de faire apparaître $W(z)$ qui donne la taille du faisceau en une section z quelconque. $W(z)$ est égal à :

$$(3.4.39) \quad W(z) = W_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2} .$$

De la même façon en reportant (3.18) dans l'expression de $\frac{1}{q(z)}$, on obtient $R(z)$:

$$(3.4.40) \quad R(z) = z \left[1 + \left(\frac{z_0}{z}\right)^2 \right] .$$

Il ne reste plus qu'à trouver $P(z)$. La résolution de l'équation (3.13) donne :

$$(3.4.41) \quad P'(z) = \frac{-j}{z + jz_0}$$

en tenant compte de la relation

$$(3.4.42) \quad 1 - j\alpha = \sqrt{1 + \alpha^2} e^{-j \arctan(\alpha)}$$

donne la solution suivante pour $P(z)$:

$$(3.4.43) \quad e^{[-jP(z)]} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2}} e^{j \arctan\left(\frac{z}{z_0}\right)} .$$

La solution trouvée s'écrit donc :

$$(3.4.44) \quad E(x, y, z) = E_0 \left\{ \frac{W_0}{W(z)} \exp\left[-\frac{r^2}{W^2(z)}\right] \right\} \cdot \exp\left\{-j \left[kz - \arctan\left(\frac{z}{z_0}\right) \right]\right\} \\ \cdot \exp\left\{-j \frac{kr^2}{2R(z)}\right\} .$$

3.3 - 4 - LE MODE FONDAMENTAL TEM₀₀

3.3.4.1 EXPRESSION DU MODE TEM₀₀ DE PROPAGATION

La solution trouvée pour la distribution de champ électrique dans le paragraphe précédent décrit le mode fondamental de propagation dans l'espace libre pour une onde à étendue transverse limitée. Ce mode dit fondamental est aussi appelé **mode gaussien** ou **mode TEM₀₀**. L'expression trouvée permet de faire apparaître un terme d'amplitude

$$(3.4.45) \quad E(x,y,z) = E_0 \left[\frac{W_0}{W(z)} \exp\left(-\frac{r^2}{W^2(z)}\right) \right],$$

un terme de phase longitudinale

$$(3.4.46) \quad \exp\left\{-j \left[kz - \operatorname{arctg}\left(\frac{z}{z_0}\right) \right]\right\}$$

et un terme de phase transverse :

$$(3.4.47) \quad \exp\left[-j \frac{kr^2}{2R(z)}\right].$$

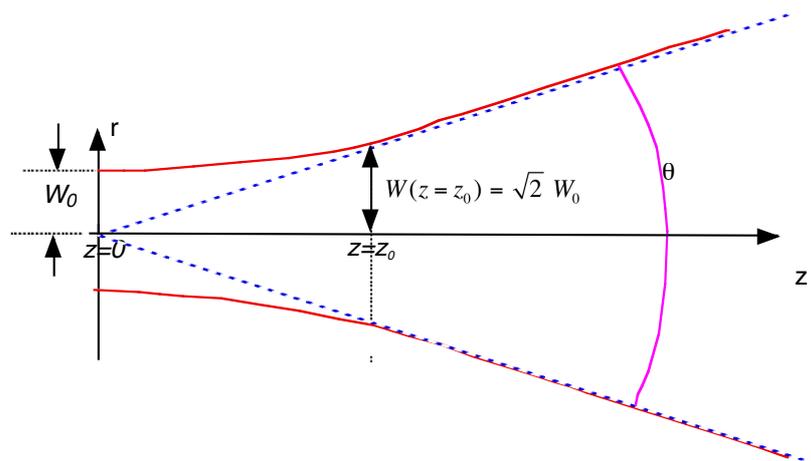
3.3.4.2 DIVERGENCE DU MODE TEM₀₀.

Le faisceau Gaussien présente une section minimale (le "waist" du mode). Les relations ci-dessus sont écrites pour un "waist" situé en $z = 0$. Par convention, on prend le rayon du mode au "waist" égal à W_0 . A une distance $r = W_0$ de l'axe, le champ est égal à E_0/e .

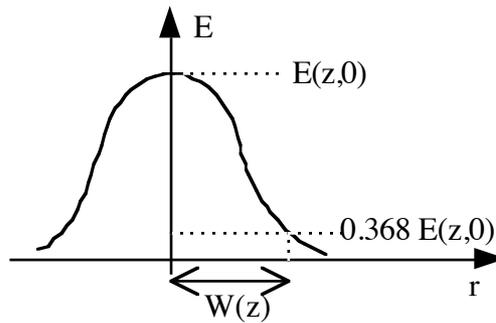
$z_0 = \frac{\pi W_0^2}{\lambda}$, appelée distance de Rayleigh, est un paramètre d'échelle qui caractérise le faisceau gaussien. A $z = z_0$, le mode a un rayon tel que

$$(3.4.48) \quad W(z = z_0) = \sqrt{2} W_0 .$$

Les définitions données plus haut pour les paramètres W_0 et $W(z)$ nous permettent de faire apparaître une surface à l'intérieur de laquelle l'essentiel de l'énergie de l'onde est contenue (figure ci-après). Cette surface est le lieu des points où l'amplitude est égale à l'amplitude sur l'axe du faisceau divisée par e .



a - Enveloppe à 1/e du mode TEM₀₀. θ est l'angle de divergence du faisceau.



b - Distribution transverse de l'amplitude du champ électrique du mode TEM₀₀

Fig. 3.3 - 16 : Distribution spatiale de l'amplitude du champ électrique du mode TEM₀₀

A une distance z très grande ($z \gg z_0$) le rayon du faisceau est sensiblement égal à :

$$(3.4.49) \quad W(z) = \frac{1}{\pi} z \frac{\lambda}{W_0}$$

L'enveloppe du faisceau pouvant alors être assimilée à un cône. Il est possible de définir un angle de divergence θ du faisceau (fig. ci-dessus) tel que :

$$(3.4.50) \quad \theta = \frac{2}{\pi} \frac{\lambda}{W_0} \approx 0,64 \frac{\lambda}{W_0} \approx 1,3 \frac{\lambda}{D_0} \text{ avec } D_0 = 2 W_0, \text{ diamètre du faisceau.}$$

Attention : Certains auteurs utilisent θ pour le demi-angle de divergence.

La relation ci-dessus indique qu'un faisceau gaussien ayant une section minimale de diamètre D_0 et une divergence θ peut-être caractérisé par le produit $D_0 \cdot \theta = \frac{4}{\pi} \lambda \approx 1,3 \lambda$. Ce paramètre décrit ce qu'on appelle la **qualité** du faisceau (du point de vue de la répartition spatiale du champ associé et donc de l'énergie en propagation).

3.3.4.3 RAYON DE COURBURE :

Le rayon de courbure de la surface d'équiphase (front d'onde) est égal à :

$$(3.4.51) \quad R(z) = z + \frac{z_0^2}{Z} = \begin{cases} \infty & \text{pour } z \ll z_0 \\ 2z_0 & \text{pour } z = z_0 \\ z & \text{pour } z \gg z_0 \end{cases}$$

3.3.4.4 PHASE DU MODE TEM₀₀.

L'expression pour le mode gaussien fait apparaître un terme de phase longitudinale et un terme de phase transverse.

Le terme de phase longitudinal $kz - \arctan\left(\frac{z}{z_0}\right)$ diffère de la phase d'une onde plane. La vitesse de phase d'une onde gaussienne est donc légèrement différente de celle d'une onde plane.

Le second terme de phase indique que le front d'onde est sphérique, avec un rayon de courbure qui dépend de z . Le rayon de courbure $R(z)$ a été défini plus haut.

En $z = 0$, le front d'onde est plan.

3.3.4.5 PUISSANCE ASSOCIÉE AU MODE TEM_{00} .

L'intensité dans le faisceau est proportionnelle à E^2 . Dans un plan perpendiculaire à l'axe Oz, l'intensité (ou densité de puissance) décroît à partir de l'axe suivant la relation :

$$(3.4.52) \quad I(r,z) = I(0,z) \exp\left(-2\frac{r^2}{W(z)^2}\right)$$

Intensité crête :

$$(3.4.53) \quad I(0,z) = \frac{2P}{W(z)^2}, \quad P \text{ étant la puissance du laser.}$$

L'enveloppe du faisceau est définie comme le lieu des points pour lesquels l'intensité $I(r,z)$ est égale à $\frac{I(0,z)}{e^2} = 0,135 I(0,z)$.

La puissance P transportée par un faisceau gaussien est égale à :

$$(3.4.54) \quad P = \frac{1}{2} \int \frac{E E^*}{\eta} dS = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{\eta} \frac{\pi W_0^2}{2}.$$

3.3.4.6 CONVENTIONS DE SIGNES POUR LE FAISCEAU GAUSSIEN DANS UNE CAVITÉ CONSTITUÉE DE DEUX MIROIRS SPHÉRIQUES.

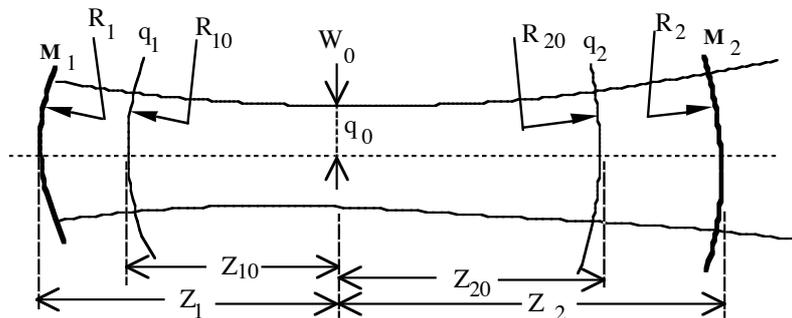


Fig. 3.3 - 17 : Faisceau gaussien dans une cavité stable. Les paramètres.

La figure ci-dessus montre une cavité stable et le mode gaussien qui lui est associé.

1. L'origine sur l'axe du faisceau ($z=0$) est prise dans le plan de la section la plus étroite du faisceau (le 'cercle de gorge' ou 'waist' dans la littérature anglaise). Les miroirs sont situés respectivement à la distance z_1 et z_2 de l'origine. La longueur L de la cavité est telle que : $L = z_1 + z_2$

2. Le rayon de courbure d'un miroir est :

- positif si le miroir est concave vers le "waist",
- négatif dans l'autre cas.

Sur le dessin ci-dessus, R_1 et R_2 sont positifs.

Remarque : On peut formuler de façon plus générale cette convention de manière à inclure les cavités instables dans lesquelles le faisceau ne présente pas de 'waist'.

Le rayon de courbure est

- positif si le miroir est concave vers l'intérieur de la cavité (un rayon parallèle à l'axe est renvoyé vers l'axe),
- négatif dans le cas contraire.

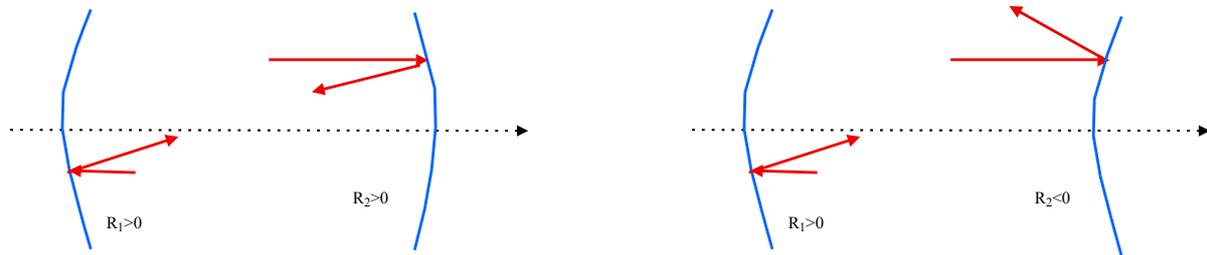


Fig. 3.3 - 18 : Convention de signe pour le rayon de courbure d'un miroir

Remarque : Cette convention est différente de celle adoptée habituellement dans les ouvrages d'optique (Voir Ch 2).

3 -Le rayon de courbure du front d'onde est :

- positif si l'onde se propage en s'éloignant du "waist",
- négatif si l'onde converge vers le "waist".

Sur le dessin R_{20} est positif; R_{10} est négatif.

4 - Le segment orienté z_{ij} dans l'expression $q_j = q_i + z_{ij}$ est :

- positif si q_j représente une onde divergente à partir de q_i , que cela soit vers la gauche ou vers la droite ;
- négatif si q_j représente un front d'onde convergeant vers q_i .

Sur le dessin ci-dessus

$$q_0 = q_1 + z_{10} \text{ (} z_{10} \text{ est négatif; } R_{10} \text{ : est négatif)}$$

$$q_2 = q_0 + z_{20} \text{ (} z_{20} \text{ est positif; } R_{20} \text{ est positif)}$$

$$q_1 = q_0 + z_{01} \text{ (} z_{01} \text{ est positif; } R_{10} \text{ est positif).}$$

3.3 - 5 - MODES TRANSVERSES D'ORDRE SUPÉRIEUR.

3.3.5.1 PROFIL DES MODES D'ORDRE SUPÉRIEUR

3.3.5.1.1 Coordonnées rectangulaires. Modes d'Hermitte-Gauss

Le mode gaussien trouvé plus haut est le mode fondamental de propagation d'une onde ém dans l'espace libre. La solution générale est donnée par l'expression

$$(3.4.55) \quad E(x, y, z) = E_{m,n} H_m \left[\frac{\sqrt{2} x}{W(z)} \right] H_n \left[\frac{\sqrt{2} y}{W(z)} \right] \cdot \frac{W_0}{W(z)} \exp \left[- \frac{x^2 + y^2}{W^2(z)} \right] \\ \cdot \exp \left\{ -j \left[kz - (1 + m + n) \arctg \left(\frac{z}{z_0} \right) \right] \right\} \cdot \exp \left[-j \frac{k r^2}{2 R(z)} \right]$$

où H_m sont les polynômes d'Hermite d'ordre m définis par :

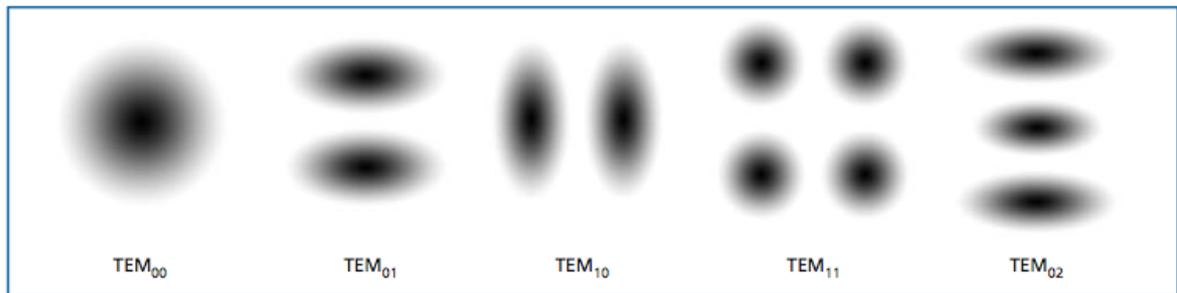
$$(3.4.56) \quad H_m(x) = (-1)^m \exp(x^2) \frac{d^m [\exp(-x^2)]}{dx^m}$$

L'expression ci-dessus est celle du mode $TEM_{m,n}$ dans un repère cartésien.

W_0 , $W(z)$ et $R(z)$ sont définis comme pour le mode TEM_{00} . $W(z)$ est un facteur d'échelle qui est le même pour tous les modes; cependant $W(z)$ n'est plus le rayon du faisceau. L'étendue transverse du mode dépend de l'ordre du mode. En définissant la limite du faisceau au pic le plus éloigné de l'axe, le mode d'ordre n a un rayon tel que :

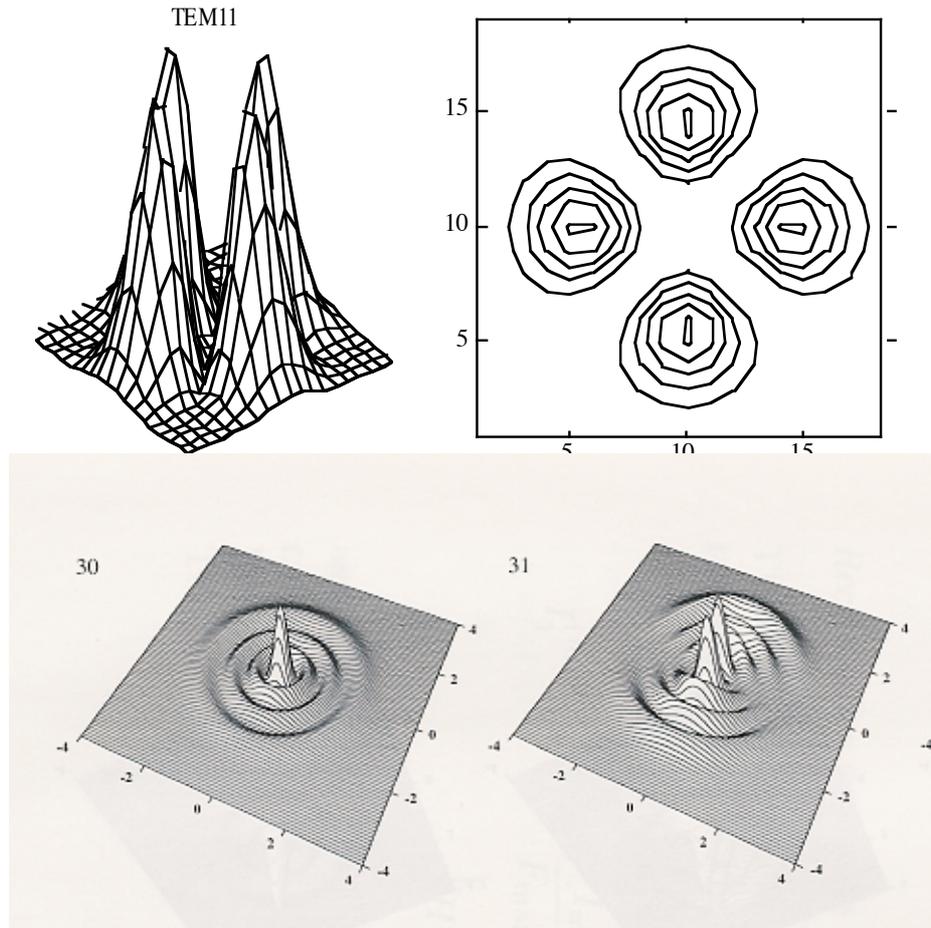
$$(3.4.57) \quad r_n \approx \sqrt{n} w$$

Le champ du mode $TEM_{m,n}$ passe par un minimum m fois suivant l'axe x et n fois suivant l'axe y . Dans une section xy le mode est caractérisé par $(m+1)(n+1)$ maxima.



Les premiers modes du type Hermite-Gauss

(http://www.cvilaser.com/Common/PDFs/Lasers/Transverse_Modes_and_Mode_Control.pdf)

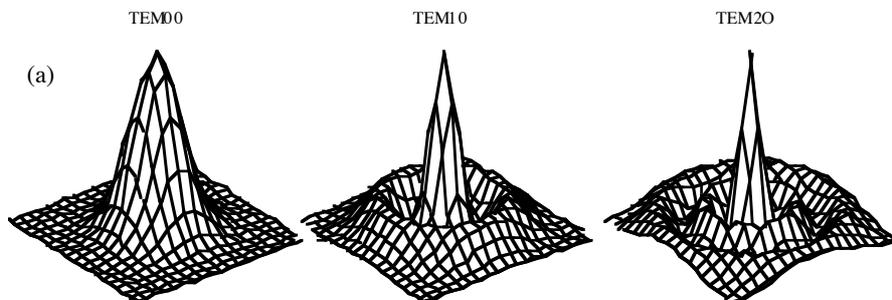


Modes TEM des faisceaux laser : TEM_{11} , TEM_{30} et TEM_{31}

Fig. 3.3 - 19 : Représentation des premiers modes transverse en coordonnées rectangulaires

3.3.5.1.2 Coordonnées cylindriques. Modes de Laguerre-Gauss

Lorsque le problème est résolu en coordonnées cylindriques, ce qui correspond au cas de nombreux laser dont la cavité présente cette symétrie, les solutions de l'équation sont décrites par les fonctions de Laguerre-Gauss.



Modes transverse TEM_{00} , TEM_{10} et TEM_{20} .

Fig. 3.3 - 20 : Représentation des premiers modes transverses en coordonnées cylindriques

3.3.5.2 DIVERGENCE DES MODES TEM_{MN}

Chaque pic d'intensité d'un mode TEM_{mn} se caractérise par la même divergence que celle du mode TEM₀₀. La divergence totale en champ lointain du mode TEM_{mn} est donnée par :

$$(3.4.58) \quad \theta_x \approx \sqrt{m} \theta_0 \quad \text{et} \quad \theta_y \approx \sqrt{n} \theta_0$$

où θ_0 est la divergence du mode TEM₀₀.

3.3.5.3 MODES TRANSVERSES ET COHÉRENCE SPATIALE.

Les modes TEM_{mn} ont une moins bonne cohérence spatiale que le mode TEM₀₀ car la surface de phase constante n'est plus une surface sphérique comme pour le mode TEM₀₀.

3.3 - 6 - PROPAGATION DE FAISCEAUX GAUSSIENS.

3.3.6.1 - LOI ABCD DES FAISCEAUX GAUSSIENS

La propagation des faisceaux Gaussiens à travers une série d'éléments connus par leurs éléments matriciels, est décrite par une loi dite loi ABCD formulée ci-après.

Un système optique caractérisé par la matrice [ABCD] transforme le paramètre q d'un faisceau Gaussien suivant la relation :

$$(3.4.59) \quad q_2 = \frac{Aq_1 + B}{Cq_1 + D} ;$$

q_1 est le paramètre du faisceau à l'entrée du système, q_2 , le paramètre du faisceau en sortie.

La loi ABCD, peut être appliquée ici car avec les faisceaux gaussiens, les conditions sont très proches des conditions de l'optique paraxiale. Appliquée au passage d'un faisceau gaussien à travers une lentille, elle nous permet de calculer les caractéristiques du faisceau après la lentille.

3.3.6.2 - FOCALISATION DU FAISCEAU GAUSSIEN PAR UNE LENTILLE.

Les paramètres d'un faisceau Gaussien focalisé par une lentille de distance focale f sont présentés sur la figure ci-dessous. Si la section la plus étroite du faisceau avant la lentille a un rayon de W_{01} et se trouve à la distance z_1 de celle-ci, le calcul exact de la distance z_2 de la nouvelle section minimale après la lentille se fait par la relation :

$$z_2 = f + \frac{(z_1 - f) \cdot f^2}{(z_1 - f)^2 + \left(\frac{\pi W_{01}^2}{\lambda}\right)^2}$$

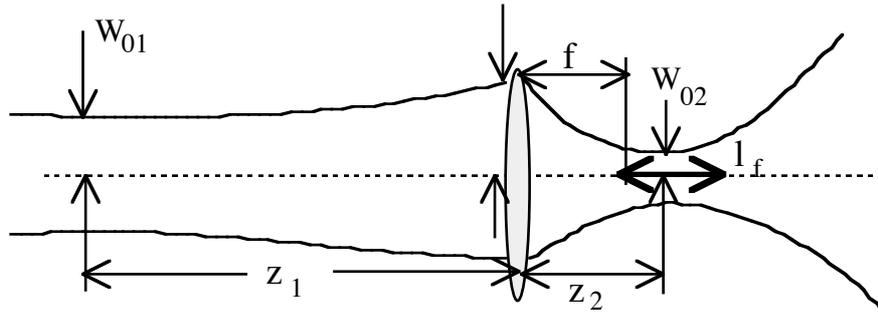


Fig. 3.3 - 21 : Faisceau Gaussien focalisé.

La tache focale est caractérisée par le diamètre minimum et la profondeur de focalisation.
Remarque: la section la plus étroite ne se trouve pas exactement au foyer « géométrique ».

Dans la section minimale après la lentille, le faisceau présente un rayon de :

$$(3.4.60) \quad w_{02} = \frac{w_{01}}{\sqrt{\left(1 - \frac{z_1}{f}\right)^2 + \frac{1}{f^2} \cdot \left(\frac{\pi w_{01}^2}{\lambda}\right)^2}}$$

En première approximation, dans le cas où le faisceau est peu divergent à l'entrée de la lentille (voisin de 1 mrd), W_{02} peut être calculé par la relation :

$$(3.4.61) \quad w_{02} = \frac{\lambda f}{\pi w_1}, \quad w_1 \text{ étant le rayon du faisceau à l'entrée de la lentille.}$$

Lorsque la lentille est placée à une faible distance du laser, le diamètre du faisceau dans la section minimale est donné approximativement par :
 $d_{02} = 2 W_{02}$ (peu différent de $f \theta$)

Remarque : La formule (41) correspond à une limite inférieure qui n'est obtenue que dans le cas idéal d'un faisceau parfaitement Gaussien, focalisé par une lentille sans défaut. En pratique, le diamètre de la tache focale est obtenu par la formule suivante

$$(3.4.62) \quad D_{\text{Foc}} = K_{\text{Foc}} \frac{4}{\pi} \lambda \frac{f}{D_1}$$

où K_{foc} est un coefficient qui tient compte de la qualité de la lentille, de la cohérence spatiale du faisceau, des effets de diffraction. Les effets de diffraction ne peuvent être négligés que si le diamètre de la lentille est supérieur d'un facteur 1,5, au diamètre à $1/e^2$ du faisceau.

La variation du rayon autour de la tache de focalisation est caractérisée par un paramètre appelé profondeur de focalisation. En introduisant, pour la variation du rayon, un facteur de tolérance F_t tel que :

$$(3.4.63) \quad F_t = 1 + \frac{\Delta W_{02}}{W_{02}}, \quad \text{la profondeur de focalisation } l_f \text{ est donnée par :}$$

$$(3.4.64) \quad l_f = \frac{2}{\pi} \lambda \sqrt{F_t^2 - 1} \left(\frac{f}{W_1}\right)^2.$$

En première approximation, pour une variation du rayon de 5% autour de la valeur minimale, la profondeur de focalisation est égale à :

$$(3.4.65) \quad l_f \approx 2 \frac{W_{02}^2}{\lambda}$$

En effet d'après (3.40) $W_1 \approx \frac{\lambda f}{\pi W_{02}}$, $\sqrt{F_t^2 - 1} = 0,32$ et donc

$$l_f = 2 \cdot 0,32 \cdot \pi \frac{W_{02}^2}{\lambda} \approx 2 \cdot \frac{W_{02}^2}{\lambda}$$

3.3.6.3 - EFFETS DE LA DIFFRACTION SUR LES FAISCEAUX LASER.

Le paramètre W_0 indique la taille du faisceau gaussien. Cependant une ouverture de diamètre $2W_0$ ne transmet que 86% de l'énergie transportée par le faisceau. Si P est la puissance totale associée au mode, l'intensité radiale varie suivant :

$$(3.4.66) \quad I(r) = \frac{2P}{\pi W^2} \exp\left(-2 \frac{r^2}{W^2}\right)$$

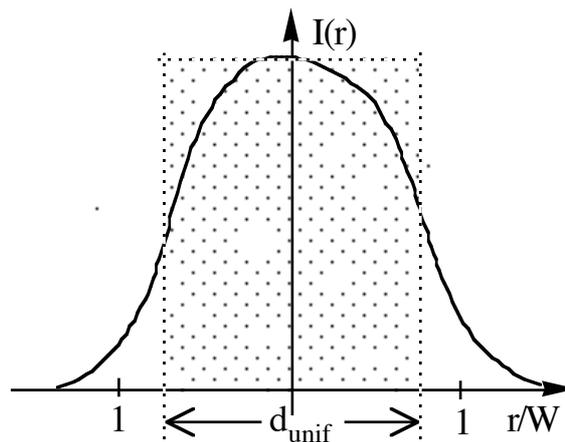


Fig. 3.3 - 22 : Faisceau gaussien : diamètre du faisceau uniforme équivalent

Si l'intensité dans le faisceau était distribuée de façon uniforme, le diamètre d_{unif} de ce faisceau uniforme et l'aire A_{unif} de sa section seraient donnés par

$$(3.4.67) \quad d_{unif} = \sqrt{2} W \quad \text{et} \quad A_{unif} = \frac{\pi W^2}{2}$$

Une ouverture de rayon a centrée sur l'axe d'un faisceau de puissance P ne transmettra qu'une puissance P_a telle que :

$$(3.4.68) \quad P_a = P \left[1 - \exp\left(-2 \frac{r^2}{W^2}\right) \right]$$

La diminution de puissance n'est pas le seul effet d'une ouverture sur un faisceau; la distribution d'intensité dans la partie transmise est également modifiée (figure ci-après).

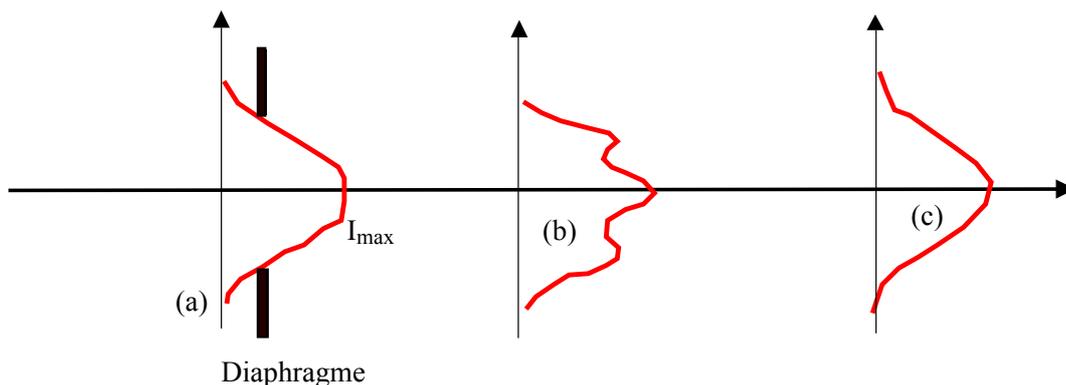


Fig. 3.3 - 23 : - Effets de la diffraction par une ouverture sur la distribution transverse d'intensité dans un faisceau laser.

Le profil d'intensité d'un faisceau gaussien diffracté par une ouverture, varie avec la distance de propagation. La théorie de la diffraction permet d'évaluer ces variations. Considérons une ouverture circulaire de rayon a qui coupe un faisceau gaussien à une distance du centre où l'amplitude $E(r=a)$ de l'onde est telle que $E(a)/E_{max} = \delta$ (soit pour l'intensité $I(a) / I_{max} = \delta^2$). La diffraction cause, au centre d'une section située à faible distance après l'ouverture, une modulation d'intensité égale à

$$\frac{\Delta I}{I} \approx \pm 2\delta$$

Une coupure à 13,5% de l'intensité (rayon de l'ouverture = rayon à 1/2 du faisceau) une variation relative d'intensité de $\Delta I/I \approx \pm 70\%$; pour une coupure à 1% de l'intensité, on obtient $\Delta I/I \approx \pm 20\%$.

A une grande distance de l'ouverture, le profil d'intensité redevient lisse, mais l'intensité au centre a diminué de $(1 - \delta^2)$ par rapport à l'intensité d'un faisceau non diffracté, ce qui donne :

- pour une coupure à 13,5%, une réduction de 60%,
- pour une coupure à 1%, une réduction de 20%.

La figure ci-après indique les valeurs d'ouverture utiles en pratique : pour laisser passer 99% de l'énergie, l'ouverture doit avoir un diamètre au moins égal à πW ; les variations $\Delta I/I$ d'intensité dans le faisceau transmis dues à la diffraction sont alors de $\pm 17\%$. Il faut que l'ouverture ait un diamètre de $4,6 W$ pour que la perturbation due à la diffraction soit réduite à moins de 1%.

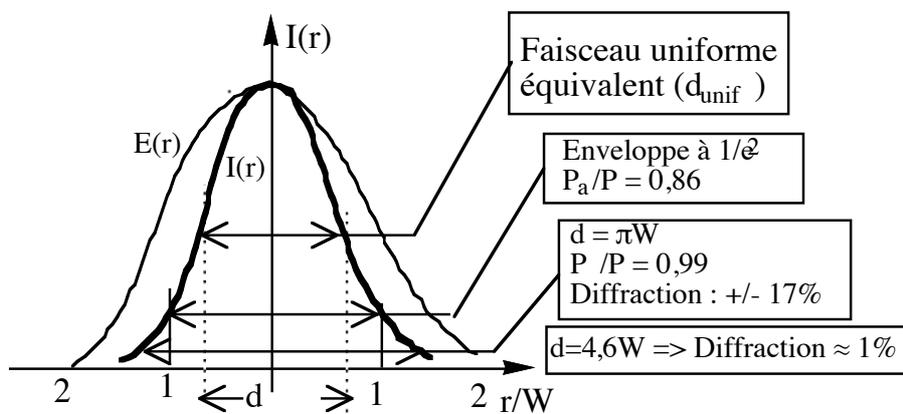


Fig. 3.3 - 24 : Les différents critères de choix du diamètre d'un faisceau Gaussien.

Les effets en champ proche (à une faible distance z), dus à la diffraction d'une ouverture circulaire de rayon a sur un faisceau laser de longueur d'onde λ sont en général évalués à l'aide du paramètre N_F appelé nombre de Fresnel, défini par la relation

$$(3.4.69) \quad N_F = \frac{a^2}{z\lambda} ;$$

N_F correspond au nombre de pics observés dans la distribution d'intensité de la section; de plus :

- si N est impair => on observe un maximum au centre,
- si N est pair => on observe un minimum au centre.

• Il existe des solutions pour diminuer les effets de la diffraction : filtrage spatial, apodisation (fenêtre dont la transmission maximale est au centre et diminue progressivement vers les bords, ce qui permet d'éliminer des anneaux de diffraction).

Remarque 1 : il existe d'autres causes que la diffraction qui peuvent perturber un faisceau laser au cours de sa propagation : les distorsions de phase et d'amplitude causées par les barreaux (amplificateur par exemple), les lentilles ou les miroirs (cela signifie que les surfaces optiques doivent être de 'bonne' qualité et que les diamètres des différents composants traversés par le faisceau doivent être suffisamment grands).

Remarque 2 : Les faisceaux issus de lasers à solide du type Nd:YAG ont un profil d'intensité qui s'explique en partie par la diffraction sur les bords du barreau.

Il en est de même pour les faisceaux de lasers à cavité instable où le faisceau utile est extrait de la cavité par diffraction sur les bords d'un miroir.

Diffraction et faisceau focalisé.

On distingue le champ proche (de la zone focalisé) et champ lointain (cette distinction correspond aux zones de Fresnel et de Fraunhofer en théorie de diffraction). L'introduction du champ lointain est utile parce que dans cette zone la distribution d'intensité varie peu avec la distance quel que soit le faisceau considéré. En pratique, on considère que le champ lointain commence à 5 fois la distance de Rayleigh z_0 (distance de Rayleigh = distance entre la section minimale et la section double de la section minimale). Pour un faisceau Gaussien $z_0 = \frac{\pi W_{\min}^2}{\lambda}$.

Remarque : Le champ lointain est obtenu soit comme indiqué ci-dessus (à 5 z_0), soit dans le plan focal d'une lentille.

3.3 - 7 - FAISCEAUX LASER DANS LES CAVITÉS STABLES.

Les modes de propagation dans les cavités stables apparaissent naturellement des considérations précédentes. Un mode donné de paramètre W_0 pourra exister dans toutes les cavités qui respectent ses propriétés. Il faudra que les rayons de courbure des miroirs de la cavité correspondent aux rayons de courbure du mode à l'endroit où les miroirs auront été placés.

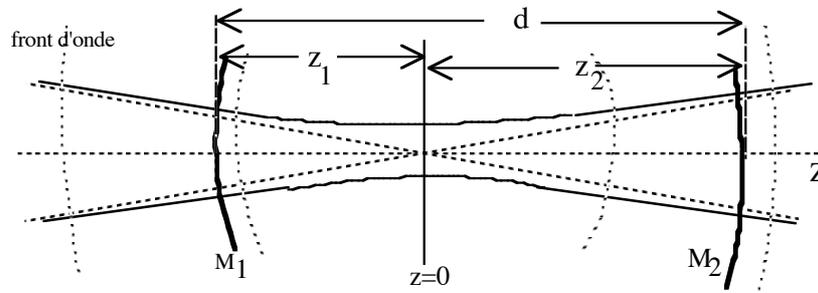


Fig. 3.3 - 25 : Mode Gaussien dans une cavité stable.

Le mode qui apparait dans la cavité est tel que le front d'onde a exactement la courbure des miroirs à l'endroit où ceux-ci sont placés.

Pour une cavité formée par deux miroirs sphériques séparés par une distance d (figure ci-dessus), le mode fondamental est tel que :

$$z_1 + z_2 = d$$

$$R(z_1) = -R_1 = -z_1 \left[1 + \left(\frac{z_0^2}{z_1} \right) \right]$$

$$(3.4.70) \quad R(z_2) = R_2 = z_2 \left[1 + \left(\frac{z_0^2}{z_2} \right) \right]$$

Ces relations permettent de calculer le paramètre W_0 du mode TEM₀₀ de cette cavité.

$$(3.4.71) \quad W_0^2 = \frac{d\lambda}{\pi} \sqrt{\frac{g_1 g_2 (1 - g_1 g_2)}{(g_1 + g_2 - 2g_1 g_2)^2}}$$

Le "waist" est situé à la distance z_1 du miroir M_1 , et z_2 du miroir M_2 , telles que :

$$(3.4.72) \quad z_1 = \frac{d(R_2 - d)}{R_1 + R_2 - 2d} \quad ; \quad z_2 = \frac{d(R_1 - d)}{R_1 + R_2 - 2d}$$

Les relations ci-dessus permettent de calculer également les tailles du faisceau sur les miroirs :

$$(3.4.73) \quad W_1^2 = \frac{d\lambda}{\pi} \sqrt{\frac{g_2}{g_1(1 - g_1 g_2)}} \quad \text{et} \quad W_2^2 = \frac{d\lambda}{\pi} \sqrt{\frac{g_1}{g_2(1 - g_1 g_2)}}$$

Sélection de mode transverse dans une cavité laser.

Lorsque le volume du matériau actif placé dans une cavité laser recouvre le volume occupé par plusieurs modes, l'oscillation a tendance à se produire sur plusieurs modes à la fois. Pour beaucoup d'applications la cohérence spatiale du faisceau doit être aussi bonne que possible. On améliore la cohérence spatiale du faisceau en limitant l'oscillation au mode TEM₀₀ uniquement. Pour cela un diaphragme est introduit dans la cavité. Le diaphragme ne doit pas limiter le mode fondamental tout en introduisant des pertes pour les modes d'ordre supérieur. Un bon compromis consiste à utiliser le critère ci-après

diamètre de diaphragme $\geq \pi w$

w est le rayon à $1/e^2$ du mode fondamental dans la section où se trouve le diaphragme. Un tel diaphragme laisse passer 99% du mode fondamental.

Dans le cas où le rayon a le plus petit dans la cavité est bien supérieur à w , le nombre de modes pouvant osciller avec des pertes négligeables est donné par :

$$(3.4.74) \quad N_{\max} \approx \left(\frac{a}{w} \right)^2$$

Compte-tenu de la divergence des modes d'ordre supérieur, dans une cavité limitée transversalement par un diaphragme de rayon a , la divergence d'un faisceau multimode pourra atteindre une valeur donnée par :

$$(3.4.75) \quad \theta_{\max} \approx \sqrt{N_{\max}} \theta_0 = \frac{a \lambda}{\pi W_0^2}.$$

Nombre de Fresnel d'une cavité .

Les effets des diaphragmes placés dans les cavités stables sont donnés par le nombre de Fresnel :

$$(3.4.76) \quad N_F = \frac{a^2}{L \lambda}$$

a est le rayon de l'ouverture la plus petite dans la cavité (miroir ou diaphragme). L est la longueur de la cavité. Le mode d'Hermite-Gauss d'ordre le plus élevé qui peut tenir dans la cavité a un ordre n tel que

$$(3.4.77) \quad n \approx \pi N_F.$$

N_F donne donc une indication sur le mode le plus élevé qui pourra exister dans la cavité parce que les pertes par diffraction seront négligeables.

Quelques règles pratiques pour les cavités laser :

- Pour une bonne stabilité mécanique : $R \leq 5 L$
- Un bon compromis entre puissance émise et "qualité de faisceau (mode TEM₀₀) est obtenu pour le rapport suivant entre le rayon de l'ouverture minimale a et le rayon du mode : $\frac{a}{W(z_a)} \leq 2$;

z_a est la distance du "waist" à l'ouverture de rayon a qui limite l'étendue transverse du faisceau.

- Une bonne stabilité de pointage est obtenue avec un miroir de sortie plan.

Loi ABCD appliquée aux cavités stables.

On peut appliquer la loi ABCD pour calculer le mode d'une cavité stable, un mode étant défini comme une distribution de champ qui se répète après un aller-retour dans la cavité. Le calcul se fait en suivant les étapes indiquées ci-après.

- 1 - Faire l'hypothèse que les modes d'Hermite-Gauss peuvent exister dans la cavité;
- 2 - Trouver un guide d'onde équivalent;
- 3 - Identifier une cellule unité (correspondant à un aller-retour dans la cavité). La complexité du calcul dépend du choix de cette cellule.
- 4 - Vérifier la stabilité de la cavité;
- 5 - Contraindre le paramètre complexe de faisceau à se reproduire après un aller-retour;
- 6 - Calculer R(z) et W(z).

Volume des modes de cavités stables.

Parmi les paramètres à prendre en considération pour le choix d'une cavité, il ya le volume qui sera occupé par le faisceau qui apparaîtra dans la cavité quand on y introduira un matériau actif. Connaissant le volume occupé par un mode, il est possible d'estimer la quantité de matériau en interaction avec ce mode. Le volume est défini par la relation suivante :

$$(3.4.78) \quad V_{mn} = \frac{1}{E_0^2} \int_0^d \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E(x, y, z) E^*(x, y, z) dx dy dz$$

soit :

$$(3.4.79) \quad V_{mn} = 2^{m+n} m! n! \frac{\pi W_0^2}{2} d$$

3.3 - 8 - FAISCEAUX LASER DANS LES CAVITÉS INSTABLES.

Les cavités stables souvent utilisées dans les lasers présentent des inconvénients liés essentiellement au faible volume occupé par le faisceau. Les cavités instables ne présentent pas cet inconvénient mais ne conviennent pas pour tous les types de lasers.

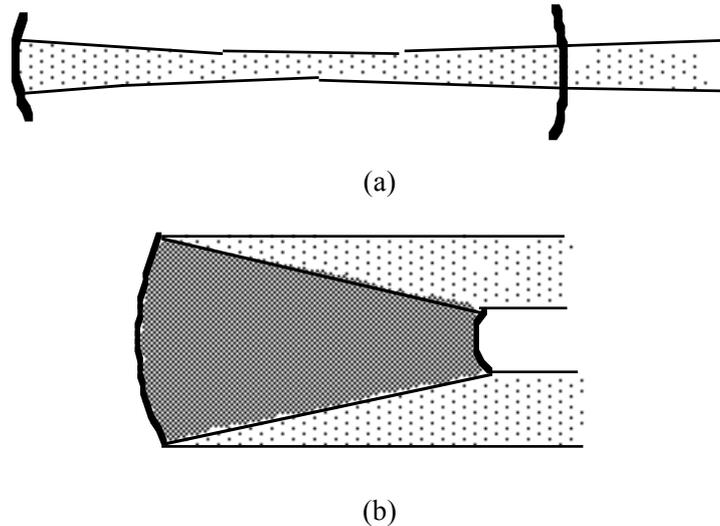


Fig. 3.3 - 26 : - Volume occupé par le faisceau dans une cavité stable (a) et dans une cavité instable (b).

Dans la cavité stable le faisceau n'occupe qu'un petit volume centré sur l'axe de la cavité. Dans la cavité instable, le faisceau emplit occupe tout l'espace compris entre les deux miroirs.

Quelques éléments de comparaison entre cavité stable et cavité instable:

Cavité stable

- Modes gaussien de grande cohérence spatiale
- Volume utile (occupé par le faisceau) de faibles dimensions.
- Faibles pertes par diffraction.

Cavité instable.

- Volume utile occupant la totalité de la cavité.
- Pertes importantes par diffraction
- Pas de solution analytique pour la description du champ
- Utile pour les milieux à grands gains.

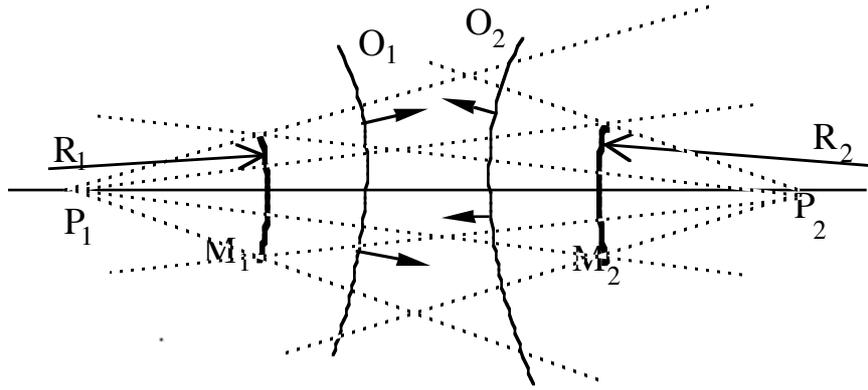


Fig. 3.3 - 27 : Ondes sphériques à l'intérieur d'une cavité instable d'après l'hypothèse de Siegman

Les effets de diffraction sur les bords des miroirs rendent impossible une description simple des faisceaux qui apparaissent dans les cavités instables comme cela a été le cas pour les cavités stables. L'onde qui oscille dans une cavité instable occupe la totalité du volume limité par les miroirs. En faisant l'hypothèse que cette onde peut être assimilée à une onde sphérique (hypothèse proposée par Siegman³), il est cependant possible d'évaluer les pertes par diffraction de ces cavités.

Une description détaillée des cavités instables n'est pas utile dans ce cours.

3.3 - 9 - QUALITÉ DE FAISCEAU

Les performances d'un laser se mesure à la puissance fournie mais aussi à la qualité de l'énergie produite. Une distribution transverse d'intensité d'un faisceau proche de celle d'un faisceau gaussien est synonyme de qualité « parfaite » ou encore de bonne cohérence spatiale. Cette propriété est à mettre en relation avec le volume minimum dans lequel un faisceau laser peut être concentré. En pratique on évoque la **qualité** du faisceau qui dépend de sa structure de modes et des effets de la diffraction. Pour décrire cette propriété, on considère le produit du diamètre du faisceau au col par l'angle de divergence. Ce produit (BPP pour Beam Parameter Product en anglais)

$$BPP = W_0 \cdot \frac{\theta}{2} = \frac{1}{4} D_0 \cdot \theta$$

ne donne pas un aperçu immédiat de l'écart du faisceau par rapport au faisceau idéal qu'est le faisceau gaussien. Aussi lui préfère-t-on le *coefficient de qualité de faisceau* noté M^2 défini comme le rapport :

$$(3.4.80) \quad M^2 = \frac{D_{CP} \theta_{CL}}{D_{CP.Gauss} \theta_{CL.Gauss}} \text{ dans lequel :}$$

- D_{CP} et θ_{CL} sont respectivement le diamètre du faisceau en champ proche (à une distance z du 'waist' telle que $z \ll z_0$) et l'angle de divergence en champ lointain pour le faisceau considéré dans l'une des directions d'un repère orthogonal ;

- $D_{CP.G}$ et $\theta_{CL.G}$ sont les paramètres équivalents pour un faisceau Gaussien.

³ A. Siegman - "Unstable optical resonators for laser applications", Proceedings IEEE, 53, 277-287, (mars 1965).

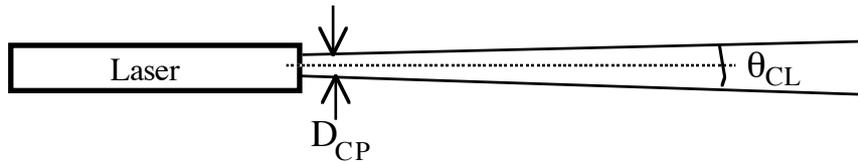


Fig. 3.3 - 28 : Paramètres utilisés dans la définition du coefficient de qualité.

CP = Champ proche ; CL = Champ lointain

Pour un faisceau Gaussien, on peut écrire $\theta_{CL.G} = \frac{2\lambda}{\pi W_0} \approx \frac{4\lambda}{\pi D_{CP.G}}$, ce qui permet d'écrire M^2 sous la forme suivante :

$$(3.4.81) \quad M^2 = \frac{\pi}{4\lambda} D_{CP} \theta_{CL}.$$

□ Remarque : La connaissance du coefficient de qualité permet d'étendre l'utilisation de la loi ABCD aux faisceaux multimodes à condition de remplacer λ par $M^2\lambda$ dans l'expression complexe décrivant le faisceau, soit

$$(3.4.82) \quad \frac{1}{Q} = \frac{1}{R} - j M^2 \frac{\lambda}{\pi W^2}$$

R, Q et W ont les significations définies précédemment pour le faisceau TEM₀₀.